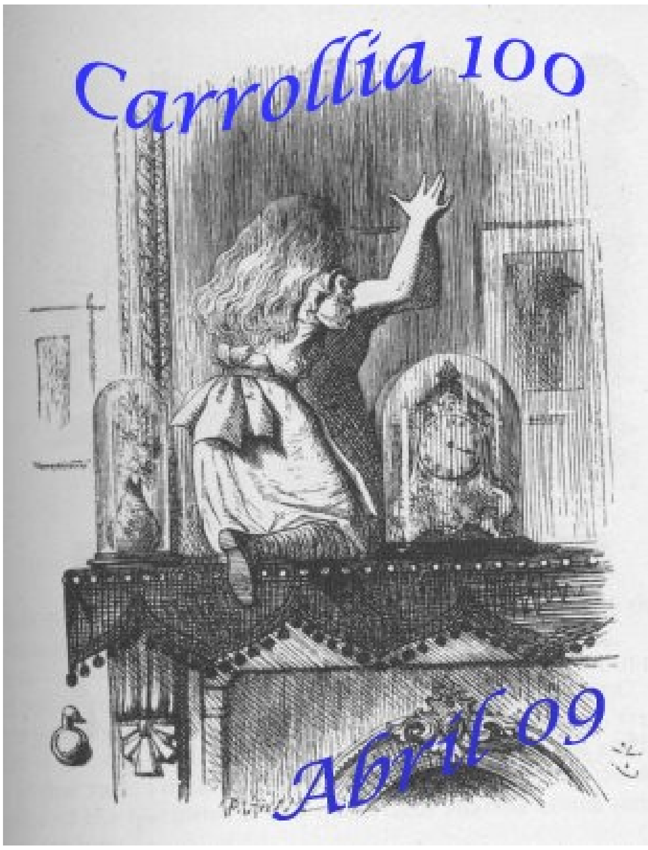

Carrollia 100
Abril 09

CARROLLIA

Dirección en la web: **www.mensa.es/carrollia**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès **Villarroel 172, E-3-2** **albaiges@ciccp.es**	**Francesc Castanyer** **Copèrnic 30**	**Pedro Crespo** **Buenos Aires 6-8, 4-3** **pedrocq@gmail.com**
www.albaiges.com		**http://pedroweb.dyndns.org**

100 Compuesto: $2^2 \cdot 5^2 = 10^2$. Es el cuarto holopotencial de tercer grado, es decir, algo así como el *Tetraktys* cúbico (v 10): $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$. Además, es el décimo cuadrado, y el 7º término de la serie de Bode, asimilable a la distancia de Saturno al Sol (que, en la realidad, es de 95,5 unidades astronómicas).

Prácticamente todas sus propiedades derivan de la "redondez" que le confiere la base de numeración decimal. Se habla de la Guerra de los 100 años (que no fueron 100, pues duró desde 1337 hasta 1453), del tributo de las 100 doncellas, o de los 100.000 hijos de San Luis (que también fueron muchos menos, unos 35.000). En las escrituras se habla de los 100 años que tardó Noé en construir el Arca, de los 100 años de Abraham cuando engendró a Isaac, la edad de Sem (Gen 11,10), de los 100 pleitos (por cierto: el cabalístico de MDVN, 'contienda', es 100), de los 100 ayunos del rabí Zira, de los 100 profetas escondidos por Obedías (I Rey 4,13). 100 codos medía el Templo en la visión de Ezequiel (Eze 40,19), 100 eran las ovejas en Mat 18,12 y Luc 15,4, etc. etc. Siempre se trata de aproximaciones que denotan "gran multitud", como cuando se pregunta: "¿Qué podrá una oveja contra 100 lobos?",

La hecatombe era un sacrificio de 100 bueyes (*hekaton-bous*) ofrecido por los griegos en casos realmente excepcionales. Uno de ellos fue el descubrimiento del teorema de Pitágoras (no olvidemos que 100 es número pitagórico, al ser $10^2 = 6^2 + 8^2$).

En mitología griega, 100 eran las cabezas del dragón inmortal hijo de Tifón y Equidna, dominado por Hércules en su undécimo trabajo para apoderarse de las manzanas de oro del Jardín de las Hespérides.

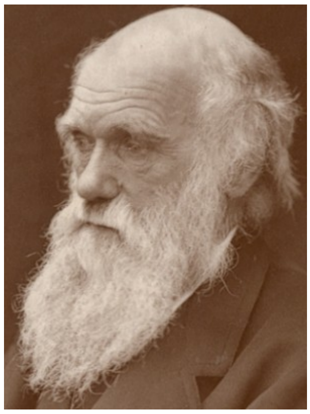
Sin embargo, la precisión se alcanza en las divisiones centesimales, abundantísimas en las ciencias. 100º es el punto definicional de ebullición del agua en la escala centígrada. En 100º se divide el ángulo recto en la graduación centesimal, y en esta misma cada grado tiene 100 minutos y el minuto 100 segundos... que son las mismas partes en que el calendario republicano francés dividió la hora en 1792. Y, por costumbre, nos referimos habitualmente a un total por percentiles o porcentajes (%). El deseo de redondez inspiró también a los creadores del medieval "*Consell de Cent*" catalán… que, abolido posteriormente, originaría, según se dice, la despectiva costumbre de referirse a los servicios higiénicos como "el número 100".

Los siglos o períodos de 100 años son ampliamente utilizados en la historia y en la vida, y antiguamente se distinguía entre el *saeculum naturalis* (identificado con la máxima duración de una vida humana) y el *saeculum religiosum* (período entre juegos seculares). Incluso los 100 días, desde el último gobierno de Napoleón (20.3 al 22.6.1815) son juzgados un período en el cual un gobierno debe haber delimitado ya su política sin ser importunado.

En Gematría, el 100 es identificado con la hebrea Qof (Q), la griega Rho (ρ) y la latina T (en textos modernos, la S). Una libra por galón imperial son 99,779 g/litro. El quintal métrico (qm) son 100 kg. En juegos de lotería terminados en este número, es "la muerte".

Portada: H.M.S. Beagle puesto a prueba el 13 de enero de 1833, a la altura del Cabo de Hornos. La imagen (cortesía de Gordon Chancellor) corresponde a un cuadro evocativo pintado por John Chancellor y titulado «Sorely tried». En su primer viaje en el Beagle, Charles Darwin zarpó de Plymouth el 27 de diciembre de 1831, para regresar al puerto de Falmouth el 2 de octubre de 1836. El joven Darwin dedicó la mayor parte de su tiempo a investigaciones geológicas en tierra firme y a recopilar ejemplares, mientras el Beagle realizaba su misión científica para medir corrientes oceánicas y cartografiar la costa. Darwin tomó notas metódicamente durante todo el viaje, y enviaba regularmente sus hallazgos a Cambridge, junto con una larga correspondencia para su familia que luego se convertiría en el diario de su viaje.

Índice

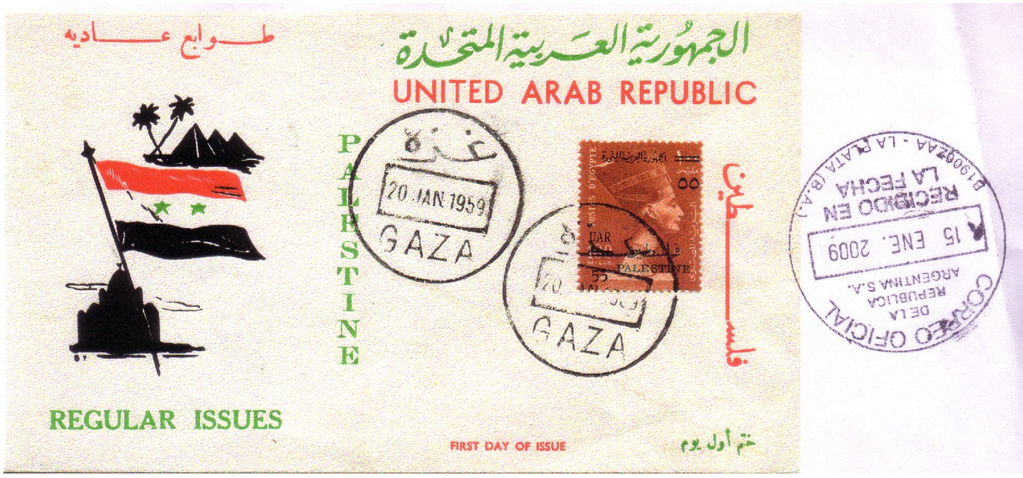


Darwin y su hermana Catherine en 1816. La fotografía de la derecha es de 1874.

Se cumplen 200 años del nacimiento de Charles Darwin y 150 de la publicación revolucionaria de “El origen de las especies”. Entrada ya la segunda parte del siglo XVII, Isaac Newton había sido el primero en revelar de un modo casi definitivo la maquinaria del gran reloj del mundo material a nuestra escala. Pero todo lo concerniente a la vida quedaba como un fortín que se mostraba inexpugnable en cuanto a explicaciones sobre su naturaleza. Abrir una brecha en la muralla de ese baluarte, brecha que con el tiempo se revelaría definitiva, fue el logro de Charles Darwin. Las ciencias de la vida son ahora un corpus de saber incontestable.
El primer borrador de "El origen de las especies" es uno de los veinte mil documentos, acompañados de unas noventa mil imágenes, que pueden consultarse en la dirección

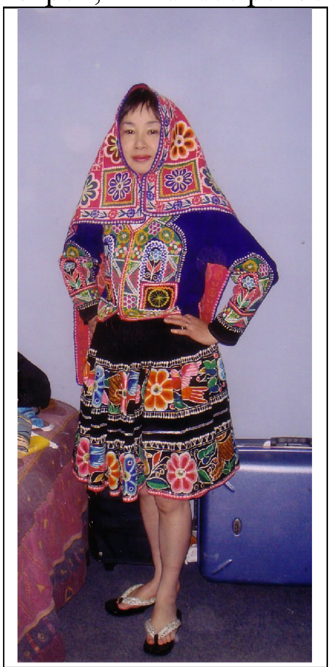
http://darwin-online.org.uk

en la cual los trabajos de Darwin se ofrecen en soporte electrónico de modo organizado y especialmente cuidado.



Último correo

Adornamos este correo, siguiendo una inveterada costumbre, con sellos postales de nuestros carrollistas. Los primeros proceden de Japón y de nuestra amiga Kiyoko Yamada, a quien vemos en esta bonita foto en traje típico. Los segundos proceden de sus antípodas, Japón, mandados por Jorge Viaña, quien acompaña su envío con esta carta:



Con un saludo muy cordial para ti, Francesc (Q-32), Pedro (Q-72) y todos los demás Carrollistas y Quijotes, y atendiendo a tu invitación de hacer envíos para C-100 (última papirográfica), en C-99, cuyo título lo interpreto como "Bye by e-Carrollia", te hago este envío (queriendo que sea original e inesperado, como expresas en tu comentario de la pág. 6). Mi carta es una confirmación implícita de que recibí C-99 (tu comentario del último viaje al Japón me resultó excelente –tú me conoces, no es un simple cumplido– similar a los que hiciste otrora, acerca de viajes similares, excepto por una conclusión que emitiste acerca de San Pablo).

Antes de seguir te comento que le fotocopia que encabeza ésta, cumplirá cinco días el 20-I: el matasellos a la derecha lo confirma. La RAU cumplirá 50 años en ese día; en ese entonces, las Repúblicas Árabes Unidas (Egipto y Siria) ocuparon la franja de Gaza y el sello postal (estampilla) de Egipto, con la figura de Nefertiti, fue resellada al efecto: en su parte superior derecha se ha suprimido el valor (1000) bajándolo a 55 y se ha añadido en árabe el nombre de los países reunidos, mientras que en la parte inferior izquierda se ha suprimido el valor facial, añadiendo (sobre la cifra) las iniciales UAR, y debajo el 55 (con números árabes). ¿Lo tomarás como alusión anticipada a tu Q-55? Y más al centro, abajo: Palestina (en árabe) y debajo en francés. El matasellos con la fecha (20 JAN 1959) lleva el nombre de Gaza, para nosotros y supra en arabun; es una pieza "Primer día de emisión" (*First Day of Issue*, internacional anglosajón) y –a su derecha, lo mismo, en árabe–. El cachet del sobre, con la bandera de la Unión, arriba un símbolo de Egipto, abajo uno de Siria, infra (en verde) emisión regular, en anglo, y supra (en rojo) lo mismo (en árabe). En forma vertical (al estilo japonés), Palestina, en francés y verde y, a la derecha, lo mismo, en árabe y rojo. Finalmente, arriba, el nombre completo de la Unión (en arabun y verde derviche) y rojo, internacional.

No podían faltar los números primos (para C-100), para que no te quede duda de quién escribió ésta: formar 100 con la mayor cantidad de primos distintos, sumados (100 = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23). Formar 100 con la menor cantidad de primos distintos (100 = 97 + 3 = 89 + 11 = 83 + 17 = 71 + 29 = 59 + 41 = 53 + 47). Formar 100 con la menor cantidad posible de primos (100 = 2 × 2 × 5 × 5) o la menor cantidad de primos en potencias de base y exponente primo (trivial: $100 = 2^2 \times 5^2$). Si se trata de hacerlo mediante suma algebraica es menester emplear por lo menos tres primos, *exempli gratia*: 100 = 97 – 2 + 5, pero, ante el aforismo de que "el orden de los sumandos no altera la suma", si se trata de suma algebraica y se pone la condición de que no se supere 100 en ninguno de los momentos de la operación, la expresión puesta como ejemplo cumple con dicha condición, mientras que la (aparentemente igual): 100 = 97 – 5 + 2 no se ajusta a la susodicha, pues da: 100 = 102 – 2, donde el primer valor del segundo miembro supera 100.

En caso de hacerlo con la cuarta operación (división) es menester emplear como mínimo cuatro primos, véase un ejemplo: 100 = (97 – 3)/2 + 53, empero si acá se ponen dos condiciones, que no aparezcan decimales, ni se supere 100 en algún momento de las operaciones parciales, no se podrá separar la primera fracción de otras dos (por la primera condición), ni obtener un común denominador (por la segunda condición). Véase: 100 = 48,5 – 1,5 + 53 (no cumple con la primera) y, por otra parte: 100 = (97 – 3 + 106)/2 (no cumple con la segunda).

Und damit basta!, pues para C-100 estoy seguro de que Antonio Cebrián Gil elaborará todas las posibilidades, con la solvencia que lo caracteriza, y si lo hace (cumpliendo con las condiciones "raras" que aquí expongo, o ignorándolas razonablemente), se podrá hacer merecedor de un Q- como nuevo caballero (Cab.) del ESQ.

Esto, que comenzó con el asunto de Gaza hace cincuenta años, se relaciona con la gran preocupación, en torno a la misma franja, con un alarmante movimiento al comenzar el 2009. Quienes puedan conseguir un alto el fuego, lo harán… y los que no tengan esa potestad, rezarán.

Luego de transitar por los números primos, se termina comentando que se tuvo el agrado y la sorpresa de recibir una excelente tarjeta navideña del Cab. Don Antonio Casao Ibáñez (Q-16) desde su Zaragoza. El gusto de recibir noticias directas cordiales del primer miembro de Mensa de España que se conoció (allí, por 1977, inicio de mi membresía) y siguiendo hasta los '80, al establecer contacto epistolar (y personal, acá del charco), con otros miembros del mundo. Antonio comenta que se halla jubilado (*ausser Dienst* = a. D.) y hecho abuelo (bienvenido al grupo de los tales). Además, el segundo lunes del corriente, se recibió C-99 y en su pág. 21, aparece don Antonio en la foto fundacional del 1984 en Madrid.

El párrafo final sirva para agradecer a JMAiO que, de aquel lado del charco, se toma el encomiable trabajo de "traducir" el fárrago que recibe destas Indicas de occidente.

Muchas gracias por tu sabrosa carta, que, como siempre, me sugiere multitud de comentarios. El primero es que, en mis recuerdos, la RAU estuvo formada inicialmente por Egipto, Siria y Yemen (territorios totalmente desconexos geográficamente). Lo bueno del caso es que Wikipedia no menciona siquiera este tercer país, pero sí lo hacen otras enciclopedias. El sueño de una República Árabe Unida, en los años de auge del neutralismo, enaltecido por la conferencia de Bandung de 1955, se disolvió como un azucarillo con el tiempo. Incluso Egipto, que continuó él solo con el nombre, renunciaría a él unos años más tarde (1971), tras la muerte de Nasser, el forjador de la quimera.

El segundo es que el mínimo número de primos para formar 100 por suma (y cualquier par) es desde luego 2, como se afirma en la conjetura de Goldbach, una de las simples de la Matemática, pero todavía no demostrada (aunque sí lo ha sido para números pares inferiores a 2×10^{16}).

En fin, sobre el conflicto de Gaza, no puede hacerse nada más que esperar. Pero el empecinamiento de unos por sobrevivir, y de otros por recuperar el terreno que consideran suyo, conduce a muertes y más muertes absurdas. En España la prensa toma siempre incondicionalmente el partido árabe, pero lo cierto es que durante años no se ha estado informando del bombardeo sistemático efectuado contra pacíficos israelíes desde la franja de Gaza. Algún día debía terminar esto.

Dice José Antonio Echagüe, de Madrid:

Leo en La Vanguardia de hoy sábado que un joven barcelonés, Aleix Ruiz de Villa, ha implementado un algoritmo capaz de optimizar el servicio público de bicicletas de Barcelona. No explican en qué consiste tal algoritmo, salvo indicar que se basa en algún modelo de simulación, lo que es obvio. No sé si habrá utilizado metodología de Programación Lineal o algún algoritmo variante de los de optimización de flujos de transporte a través de redes tipo Ford Fulkerson, o algo así; o si se tratará de un planteamiento enteramente novedoso. Si sabes algo ya me dirás.

También a mí me sorprendió el extenso artículo dedicado al algoritmo. Lo interpreto como un intento de la Generalitat de popularizar un poco el sistema del movimiento de bicicletas, que tan mal ha sido acogido por la población peatonal. Se trata de un perfecto caso de aplicación de los métodos socialistas: no se crea nada, sólo se reparte. Las bicicletas pasan a irrumpir en la calzada y en las aceras. Como en la primera son las débiles y en la segunda las fuertes, la elección no es dudosa, y bien que se enteran los viandantes. Como además BCN es una ciudad con desniveles, todo el mundo que vive en la montaña coge la bicicleta hasta la orilla del mar y allí la deja, regresando en metro. Los camiones se encargan de subirla. Apuesto a que nadie publica el balance de costes; creo que saldría mucho más ventajoso pagar un taxi a todos los ciclistas, y de paso se revitalizaría la economía del transporte urbano privado... aunque no la de los fabricantes de bicicletas, que de todos modos con las que se toman y las que se rompen ya van tirando.

El siempre despierto Luis Muñoz Modroño me hace notar:

Acabo de abrir el número de Omnia 153, donde publicas el artículo "Los tres reyes"; para tu propio sentido del humor te hago notar que el rey de Aragón difícilmente habría podido llevar patatas a una comida en 1196, (la patata es invento posterior a 1492). Estos pequeños deslices no restan autoridad al autor, sino que establecen un guiño de complicidad entre escritor y lector del que los terceros quedan fuera, porque el lector entiende, los otros no. Recuerdo que ya cuando escribiste el BOFCI sobre las piquiponias (yo las habría llamado piquiponianas basándome en los sufijos castellanos que indican procedencia, -ano, -ense, -eño, etc), en la primera línea de una de las últimas páginas, 20 ó 21), cometías una al usar la expresión "izaron las manos", que se sepa, las manos no son izables, sino alzables. En realidad utilizo la expresión inventar en un sentido relativamente literal, ya que habría que preguntarse si realmente descubrimos América o la inventamos, al menos en lo que al carácter se refiere; yo tuve un alumno de Chicago que invariablemente iba a clase con su gorra de béisbol pese a que no le gustaba ese deporte, pero sin duda era lo que los españoles esperaban y él se limitaba a adaptarse a nuestro estereotipo. Tampoco el ya famoso follar de Zapatero merece una descalificación, aunque quizá sí una muy freudiana sospecha sobre sus inconscientes intenciones. No sé si te mando este mensaje al sitio correcto, pero en este momento no tengo otra dirección tuya a mano. Sin nada más, un abrazo y hasta la próxima.

Gracias por la nota y por tu benevolencia. Como desde luego ya consideré desde el principio el relato una mera leyenda (en Granada se cuenta una similar de tres obispos), ni me molesté siquiera en analizar críticamente el resto de la tradición como llegó a mis manos. En mi novela *Alcibíades el primer griego* cometí un anacronismo similar al situar al protagonista en una comida donde entre otras cosas se servía salsa de tomate... también procedió el lapsus de haber consultado un "menú histórico griego" y haberlo copiado sin más, sin someterlo a examen. Es malo fiarse acríticamente de los que pontifican.

En lo de "izar" sí fui consciente, pero lo utilicé como una simple metáfora, para remarcar el carácter enérgico de la "izada". De hecho el español es un idioma que, en mi opinión, abusa demasiado del recurso de los sinónimos, pero qué le vamos a hacer. En el DRAE figuran multitud de "sinónimos" que sólo son tales por mal uso; intenté combatir esto en mi *Diccionario de términos afines*, pues creo que la riqueza de una lengua no está en las muchas palabras para designar una cosa sino en el uso de la adecuada en cada caso.

En fin, si escribí "piquiponias" fue una mera errata; desde luego son "piquiponianas" (a veces, menos frecuentemente, "piquiponadas"). Gracias por hacérmelo notar; lo corregiré en el original, aunque, con el BOFCI terminándose, de poco aprovechará...

PS En cuanto a lo "descubrir" América, me he acordado de una poesía de mi niñez que retuve en la memoria:

–Dígame usted, don Vicente...
usted que es tan competente...
–Pregunte usted, don Facundo.
–¿Cómo es *Nuevo* un continente
que es ya tan viejo en el mundo?
–Era nuevo, no lo es ya.
Como creado por Dios,
existía, claro está,
antes de año mil cua-
trocientos noventa y dos.
Pueblo inculto lo habitaba,
mas aquella pobre gente
no sé como respiraba,
pues el Nuevo Mundo estaba
cubierto completamente.
–¿Cubierto?
–¡No hay discusión!
–¡Hombre, venga una razón!
–¡Lo dice la historia, y basta!
Estuvo *cubierto* hasta
que lo *descubrió* Colón.

Observemos, de paso, el ingenuo tic colonialista del tal don Vicente. Mira que llamar "pueblo inculto" al americano precolombino pese a Tenochtitlán, la mayor ciudad del mundo (sin excluir las europeas), sus templos y sus observatorios astronómicos… En fin.

Aunque pertenece a otra sección, no podemos dejar de señalar que recientemente, durante el equinoccio de primavera, simétrico por excelencia por la igual duración del día y la noche, se celebró en Torredembarra el ICPI (I Congreso Palindrómico Internacional), al que concurrieron representantes de toda España e incluso Hispanoamérica (México y Chile, desgraciadamente en el último momento no pudieron acudir los colombianos). Una de las participantes fue la chilena Sylvia Tichauer, en cuyo honor reproducimos los sellos de correo con que adornó su carta:

También Antonio Cebrián se despachó a gusto con el número 100. He confeccionado un artículo refundiendo algunas cartas suyas, mías y de Miguel Ángel Lerma, que intervino en el asunto. Lo hallaréis en el correspondiente lugar.

Y ha llegado la hora del "hasta la vista". Se impone modernizarse, el papel es cada vez más complicado de manejar y el correo más caro. Pero Pedro, Francesc y yo seguiremos en la brecha, siempre pendientes de vuestras aportaciones.

Entonces, amigos, éste es el último correo que vais a ver sobre papel. Se me pianta un lagrimón, como dirían nuestros amigos argentinos, al evocar tantas páginas, tantas cartas vuestras, tantas carreras hacia la imprenta. Es un cuarto de siglo, más de un tercio de mi vida el que he pasado con vosotros. Gracias por vuestro soporte, por vuestra atención, por vuestras colaboraciones, y, sobre todo, pues vuestro interés. Siempre seguirá nuestra amistad, forjada al calor de las fórmulas matemáticas y los problemas de la lengua.

¡Hasta siempre!

Los editores

Anuncio de LinguaSignal

LinguaSignal es una revista análoga a Carrollia, dedicada exclusivamente a la lingüística, publicada en inglés en Gran Bretaña. Sus editores la ofrecen a todos los mensistas españoles que lo deseen en el siguiente anuncio:

Members of Mensa Spain can receive the LinguaSIG PDF by email if they subscribe to it (see the attached application form).

How members of British Mensa gain access to a newsletter from a SIG in Mensa Spain is, I would guess, up to the regulations for SIGs in Mensa Spain. But it will presumably be individual subscriptions by choice if it happens in that direction.

Getting LinguaSignal as a PDF file rather than on paper.

As from now, the LinguaSIG newsletter can be sent to you by email instead of as a paper newsletter. This is free of charge and does not count as one of the two free SIG memberships available to members of British Mensa. To request this, you can either visit the Mensa website at www.mensa.org.uk or contact the Wolverhampton office by emailing sigs@mensa.org.uk, calling 01902 772771 or writing to British Mensa, St John's House, St John's Square, Wolverhampton WV2 4AH. Please remember to quote your Mensa membership number in each case. If you are a member of another national Mensa organisation or of Mensa International, the process is the same, but please attach proof of your current membership when you contact the British Mensa Office.

Best wishes

Carrollia en formato electrónico

Aprovechemos para añadir que Carrollia, la revista de matemáticas recreativas y Lingüística, puede ser vista en formato pdf en **www.mensa.es**. Se agradecerán aportaciones.

No se ha publicado este año la tradicional lista de suscriptores porque, como sagazmente indicó uno de ellos, esto podría contravenir las actuales leyes sobre privacidad. Todos los miembros recibirán una comunicación electrónica para informarles de los formatos de la Carrollia electrónica y la forma de participar en ellos.

Sin embargo, hay algunos carrollistas cuya dirección electrónica no poseo. Son Francisco Ayuso, María José Espinosa, María Hijosa, Víctor León, Jordi Quintana y Josep Maria Solé. Ruego a todos me la manden cuanto antes a fin de poder incluirles en los mailings futuros.

UNA PROPIEDAD DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Cualquier número de la forma $\mathbf{F_{2n+1} - 1}$, siendo F_{2n+1} un nº de la serie Fibonacci, se puede expresar como suma de “n” nºs Fibonacci y siendo “n” el menor nº de sumandos posibles.

Formemos las series:

n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, …

F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

$F_{2n+1} - 1$ = 1, 4, 12, 33, 88, 232, ...

n	$F_{2n+1} - 1$	Descomposición en suma	nº sumandos
1	é	$1 = F_2$	1
2	4	$4 = 1+3 = F_2+F_4$	2
3	12	$12 = 1+3+8 = F_2+F_4+F_6$	3
4	33	$33 = 1+3+8+21 = F_2+F_4+F_6+F_8$	4
…..			
a	$F_{2a+1} - 1$	$F_2+F_4+F_8+\ldots+F_{2a}$	a

Para que la suma tenga el menor nº de sumandos estos tienen que ser los mayores posibles.

Para ello en la descomposición en sumandos de $F_{2n+1} - 1$, cogemos el nº Fibonacci que más se le aproxime por defecto, F_{2n}. La suma de los sumandos restantes es = $F_{2n+1} - 1 - F_{2n} = F_{2n-1} - 1$.

Igualmente, el sumando nº Fibonacci que más se aproxime por defecto a $F_{2n-1} - 1$ es = F_{2n-2}.

Y así sucesivamente obtendríamos los restantes sumandos hasta que $F_{2n-h} - 1 = 0 \rightarrow F_2 - 1 = 0$; $2n - h = 2$; $h = 2(n-1)$;

Quedando: $F_{2n+1} - 1 = F_{2n} + F_{2n-2} + F_{2n-4} + \ldots + F_2$;

El nº de sumandos es = al nº de nºs pares desde el 2 al 2n = 2n/2 = n.

Antonio Cebrián 2 enero 2009

Comentario de Miguel Ángel Lerma

La parte que me parece un poco débil en el argumento es la afirmación de que para que la suma tenga el mínimo número de sumandos hay que elegir siempre el número de Fibonacci más próximo por defecto. Este método es lo que en inglés llaman un "*greedy algorithm*" (algoritmo ávido). Sin embargo esa afirmación no es en general correcta. Por ejemplo si en vez de usar números de Fibonacci usáramos números triangulares 1, 3, 6, 10, 15, 21,... el algoritmo ávido nos llevaría a expresar el número 20 como 20 = 15 + 3 + 1 + 1, 4 sumandos, sin embargo 20 = 10 + 10 sólo requiere 2 sumandos.

Sin embargo el argumento de Antonio sí que prueba lo siguiente (para facilitar la discusión escribo F[n] = n-ésimo numero de Fibonacci):

"F[2n+1] - 1 no se puede expresar como suma de menos de n números de Fibonacci distintos y no consecutivos."

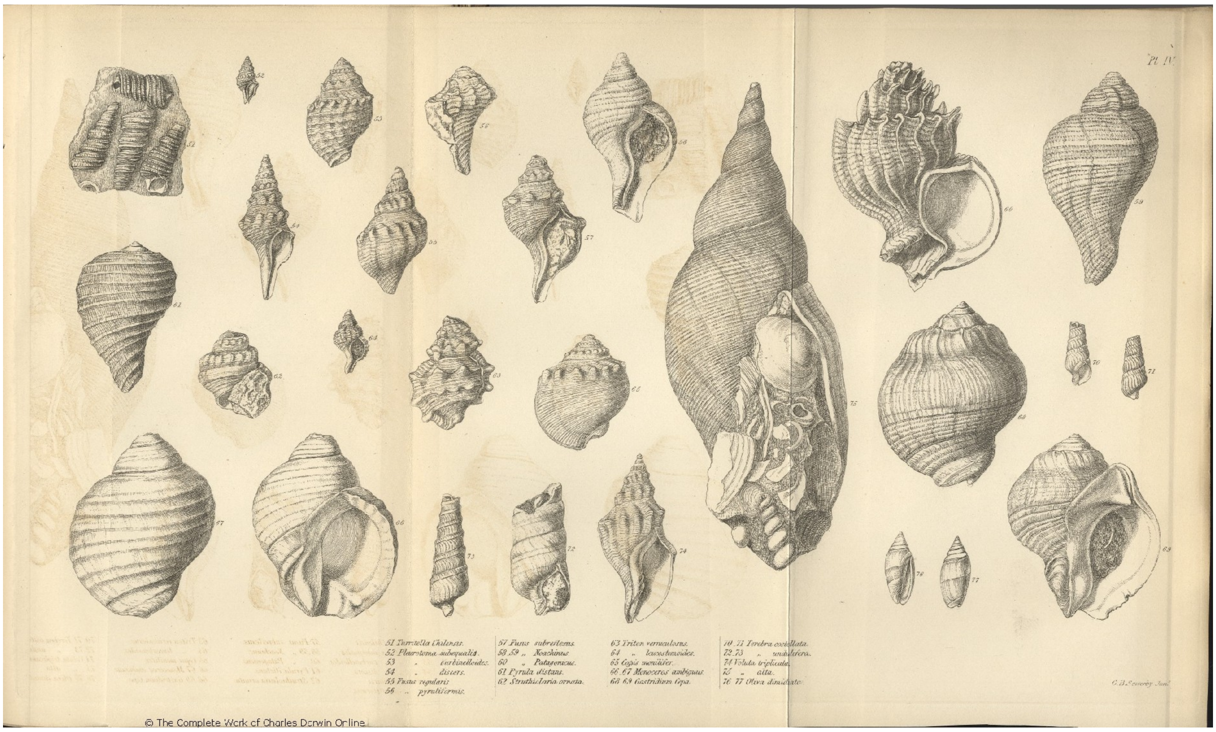
Antonio prueba (por inducción) que la representación de Zeckendorf (como suma de números de Fibonacci distintos y no consecutivos) de F[2n+1] - 1 requiere n términos. En virtud del teorema de Zeckendorf sabemos que dicha representación es única, y por lo tanto el resultado queda establecido.

En el enunciado podemos eliminar la condición de que los sumandos sean "no consecutivos", porque en una suma que contuviera dos números de Fibonacci consecutivos éstos se podrían sustituir por su suma, que es otro número de Fibonacci, y la suma total tendría un sumando menos. Por ejemplo la suma F[2] + F[4] + F[5] es igual a la suma F[2] + F[6].

Sin embargo me pregunto si el resultado es todavía cierto si eliminamos la condición de que los sumandos sean distintos. Probablemente lo es, pero habría que ver cómo pasar de una suma con sumandos repetidos a otra suma con no más términos y sin repeticiones, por ejemplo quizás usando reiteradamente la siguiente identidad:

F[n] + F[n] = F[n+1] + F[n-2]

Miguel Ángel Lerma, 07.01.09



EL PROBLEMA DE MARIANO RIBÓN

Mi amigo y colega Mariano Ribón me plantea el siguiente problema: "Sacamos n bolas de una urna, y todas resultan ser blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que *la (n+1)-ésima* sea también blanca?"

En mi opinión, se trata de un problema de inferencia estadística, y como tal no puede ser resuelto más que si hacemos una serie de suposiciones acerca de la ley que rige la distribución de las bolas. Si para empezar suponemos que la probabilidad de extraer bola blanca es constante y vale p (distribución binomial), es claro que los mejores estimadores para la distribución son:

$$m = \bar{x} = 1$$
$$\sigma = 0$$

Con arreglo a estos estimadores, la probabilidad de que la siguiente bola blanca sería 1.

Sin embargo, esta estimación no nos deja del todo satisfechos. Para conseguir una mejor aproximación, podríamos partir de un punto más genérico: que la probabilidad de obtener bola blanca es $p < 1$, conque la de haber obtenido n bolas blancas en n ensayos es p^n.

De todos modos, desconocemos cuál es esa probabilidad. Sin embargo, hagamos ahora una suposición crucial: que *la probabilidad de la probabilidad sigue una distribución uniforme, entre 0 y 1*. En este caso, a cada valor posible p corresponde una probabilidad de sacar n bolas blancas igual a $p^n dp$, y por tanto el valor medio de los valores obtenidos para distintos valores vale:

$$\bar{p}(n) = \int_0^1 p^n dp = \frac{1}{n+1}$$

Este valor se corresponderá con la probabilidad de haber sacado bola blanca en el caso más general. Análogamente, la probabilidad de obtener n+1 bolas blancas en n+1 ensayos sería:

$$\bar{p}(n+1) = \frac{1}{n+2}$$

Apliquemos ahora el teorema de Bayes, según el cual la probabilidad *a posteriori* de que se haya dado una entre varias posibles causas actuantes es la probabilidad de que ésta generara el resultado partida por la suma de todas las probabilidades. O sea, en este caso, *la probabilidad de seguir obteniendo bola blanca en función del hecho de que se hubiera obtenido hasta entonces siempre bola blanca* vale:

$$p = \frac{n+1}{n+2}$$

Por ejemplo: si es 100 extracciones se ha obtenido siempre bola blanca, la probabilidad de que ocurra lo mismo en la extracción 101ª será

$$p = \frac{101}{102} = 0{,}9902$$

Paradójicamente, la probabilidad de que en la segunda extracción se obtenga bola blanca tras haberla obtenido en la primera es p = 2/3 = 0,6667. Se explica esta aparente anomalía recordando que, en caso de un solo ensayo, solamente la mitad de los posibles valores de p hubieran dado el resultado de 1 bola blanca. Por tanto, la probabilidad para ello era ½. La probabilidad de obtener 3 bolas blancas en el caso de distribución uniforme de la probabilidad de la probabilidad es $1/3$, conque la probabilidad de obtener tres bolas blancas en función de haber obtenido antes 2 valdría 2/3.

Josep M. Albaigès

Barcelona, abril 99

SOBRE EL PROBLEMA DE LEWIS CARROLL

Mariano Ribón objeta a la solución dada en mi libro ¿SE ATREVE VD. CON ELLOS? que el mono debe subir mientras el peso baja, alegando que como no actúan fuerzas exteriores, el cdg del conjunto no puede variar.

Sin embargo, en nuestra opinión, sí actúan fuerzas exteriores: *las de reacción del apoyo de la polea*. De hecho, el principio de funcionamiento "normal" de la polea las exige, pues en caso de izado de un peso cualquiera desde el suelo solamente pueden equilibrarse el conjunto de la fuerza de tracción y el peso (ambas en la misma dirección) con una reacción de valor doble aplicada en dicho apoyo.

Imaginemos el mono y el contrapeso (que ahora habría que llamar "contramasa") en el espacio (sin gravedad), cada uno al extremo de un hilo recto. Es claro entonces que un tirón del mono se corresponderá con un acercamiento mutuo con la contramasa. En la Tierra, la polea actúa solamente como "redireccionador" de las fuerzas, conque sigue dándose el mismo caso.

De hecho, yo mismo me he izado a veces por una polea tirando del otro extremo del hilo.

Simplicio tercia

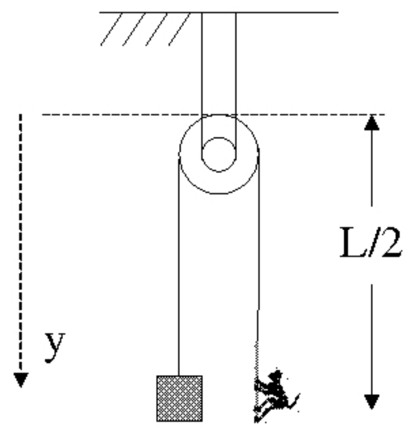
Esta vez es Simplicio (un servidor) el que tiene voluntad de árbitro. Esta cuestión disfrazada de acertijo es en realidad un problema de mecánica que, a pesar de la sencillez del modelo físico propuesto, desafía —en muchas de las perspectivas con las que se enfoca— al razonamiento según las pautas del sentido común.

Aunque no está muy claro si este problema fue creado (aparece desde luego en sus problemas de ingenio) por el reverendo Charles Dodgson, nuestro venerado Lewis Carroll, que era también profesor de matemáticas en Oxford, sí consta que se interesó por las opiniones de sabios de su entorno, y escribió al respecto:

«Es muy curioso señalar las diferentes opiniones de diversos matemáticos. Price dice que la pesa sube con velocidad creciente. Clifton (y Harcourt), que sube a la misma velocidad que el mono, en tanto Simpson ¡dice que desciende!. Un distinguido ingeniero opina que "no produciría más efecto que una mosca escalando en la soga".»

La opinión de Carroll acerca de este problema puede encontrarse en su Diario, volumen 2, página 505. La última referencia plantea la defensa de un reverendo británico que afirma que la pesa permanece estacionaria.

Presentamos aquí la solución al problema mediante un método que elimina la tarea de tener en cuenta las fuerzas de reacción en el sistema y que no es otra que la versión de Lagrange de las ecuaciones de Newton.



El mono está en equilibrio con un peso a su misma altura L/2. Comienza a «trepar» por la cuerda, ganando μ metros de cuerda por segundo. Tendremos (ver figura 1)

$$y_1 + y_2 = L - \mu . t \qquad [1]$$

La energía cinética en función de las coordenadas será

$T = (1/2)m(y'^2_1 + y'^2_2)$ (los superíndices 2 indican exponente 2).

y de [1] quedará

$$T = (1/2)m\left[y'^2_1 + (\mu + y'_1)^2\right]$$

La energía potencial vale

$$U = -mg(y_1 + y_2)$$

y según [1] obtenemos

$$U = -mg(L - \mu .t)$$

La lagrangiana (un solo grado de libertad) será

$$L = T - U = (1/2)m(y_1^{'})^2 + (\mu + y_1^{'})^2 + mg(L - \mu .t)$$

La ecuación del movimiento $d/dt(\partial L/\partial y_1^{'}) - \partial L/\partial y_1 = 0$ adopta la forma $m(2y_1^{'} + \mu) = 0$, es decir $y_1^{'} = -\mu/2$

Puesto que para t = 0 es $y_1 = L/2$, se tendrá

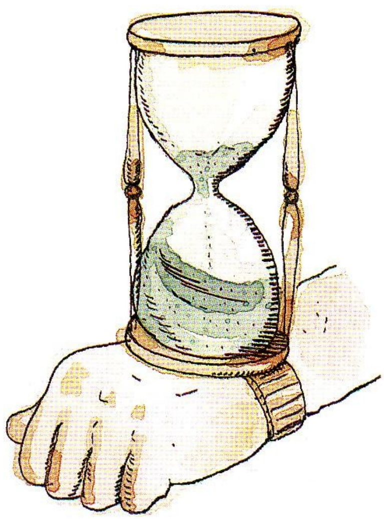
$$y_1 = L/2 - (\mu/2).t$$

A y_2 le corresponderá el valor (según [1])

$$y_2 = L/2 - (\mu/2).t = y_1$$

lo que indica que en todo momento la pesa y el mono se hallan a la misma altura. Este resultado se podía haber inferido teniendo en cuenta que la tensión de la cuerda es la misma en ambos extremos (los cambios de tensión se transmiten por la cuerda a la velocidad del sonido en la misma), de modo que al ser las condiciones iniciales de ambos cuerpos (mono y pesa) iguales, sus movimientos han de ser idénticos.

P. Crespo, marzo 2009



USTÚ

Éste es el tratamiento que vi proponer hace muchos años a un periodista como medio de evitar la ambigüedad en que nos encontramos a veces, sin saber claramente cómo tratar a nuestro recién presentado interlocutor. La verdad es que el abundante repertorio de tratamientos hispánicos no notaría mucho la adición de uno más. Nada más grato al oído carpetovetónico que una palabra que le permita afirmarse en su grandeza, en su poder. La inflexión pronominal y verbal testifica a cada momento la propia opinión.

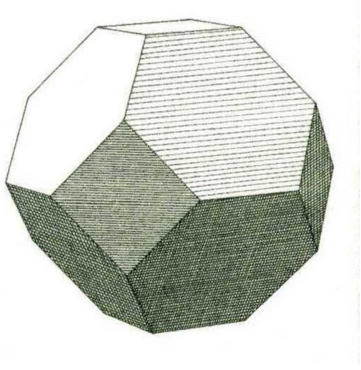
Con todo, el actual fenómeno del arrollador avance del *tú* en desdoro del *usted*, no es nuevo. Existen curiosos precedentes de modas similares anteriores, estudiadas a fondo por el académico argentino Arturo Capdevila. El *vos*, totalmente eliminado del habla actual española (¡no de la americana!) fue conocido desde los romanos, y aplicado tanto como tratamiento de respeto a una persona como a un grupo, lo que hizo inevitable, para distinguir ambas acepciones, la introducción de la partícula *otros*, que acabó fijándose en la segunda persona del plural. Con ello el uso del *vos*, ya desprovisto de toda ambigüedad, fue perdiendo su carácter de respeto para hacerse más y más compadrero, de tal modo que hacia la época del descubrimiento de América, paradójicamente ya sonaba con demasiada familiaridad o con un aire despectivo u hostil: era tratamiento reservado a los criados y a gente de baja condición.

En las obras del Siglo de Oro aparece una alternancia, en un plano de igualdad, entre ambos tratamientos. De esa época procede sin duda el refrán: "Dijo a corneja al cuervo: Quítate allá, negro. Y el cuervo a la corneja: Quitaos allá, negra." Pero, pese a ello, existen motivos para pensar que el teatro no reflejaba fielmente la situación social, como indica una carta al cardenal Espinosa de 1579: "El secretario Antonio de Eraso llamó de *vos* a Gutiérrez López, estando en el Consejo, y por esto se acuchillaron". En todo el tiempo no cesó de acentuarse el carácter despectivo del *vos*, al punto que la interjección *¡vos!* equivalía a una expresión de enojo, como recogió el DRAE hasta su primera edición del siglo XX.

Existen, pues, motivos para dudar del ajuste a la realidad histórica de ese tratamiento sistemático de *vos* con que se pretende imitar, en las comedias de época, el habla del nuestro Siglo de Oro. Más bien, como es bien sabido fue ganando terreno sin cesar el *vuestra merced*, pronto contraído a *usarced*, *vocé* y finalmente *usted*, aparecido a inicios del siglo XV, y que se ha convertido hoy en la única segunda persona utilizada en algunas partes de América, y, en plural, también en parte de Andalucía y Canarias.

Ese *usted* acabó de apuntillar el *vos*, especialmente cuando fue reforzado con otros tratamientos que vemos hoy como algo ridículos, pero que se conservan en algunos estamentos, como el Ejército: *usía* (vuestra señoría), *vuecencia* (vuestra excelencia) y sus innumerables formas equivalentes: *vuecelencia*, *ucencia*, *vusiría*, *usiría*. Todas ellas forman forman hoy un pintoresco museo de la soberbia humana.

JMAiO, ene 98



El número 100 de *Cu-cut!*

Amb motiu del seu número 100 la revista *Cu-Cut!,* al·ludint al terme amb què en certs ambients es referia al sanitaris, va dedicar un monogràfic al tema.

En una època que, almenys al nostre país, no es conexia el paper higiènic i era corrent recórrer a la premsa, tothom entenia frases com:

El paper del Noticiero va molt bé per al trasero
o
Serveix-te d'El Liberal que és finet i no fa mal

Com que en aquells dies era recent el ressentiment que en els medis catalanistes va provocar que el poeta Eduardo Marquina, català, es passés a la poesia castellana, va ser molt celebrat el "poema" que li va dedicar el *Cu-cut!*

(Estava il·lustrat amb una dibuix d'un personatge fent les seves necessitats mentre llegia.)

Tú, lector, que vas leyendo
mientras el cuerpo va obrando
reflexiona, y ve observando
el compromiso tremendo
que en tu posición supina
sería no hallar a mano
un poema de Marquina

Francesc Castanyer, BCN, mar 09

Nota (de la Wiki): Como ya nada es *ingoogleable*, he aquí unas notas para más información:

Cu-Cut! fue una revista satírica española de ideología catalanista e independentista de comienzos del siglo XX. Se publicó entre 1902 y 1912 y consiguió gran popularidad, además de contener en sus páginas un grupo interesantísimo de creadores gráficos.

Próxima políticamente a la Lliga Regionalista de Cambó y Prat de la Riba y al periódico *La Veu de Catalunya*, entre sus principales dibujantes se cuentan Opisso, Cornet, Junceda, Llaverías, Apa e Ismael Smith. Su mascota era un catalán cabezudo con una barretina, creado por Gaietà Cornet.

Su importancia radica en los incidentes que tuvieron lugar el 25 de noviembre de 1905. Ese día su redacción, junto con la de La Veu de Catalunya, fue asaltada por un centenar de militares, como reacción a una caricatura antimilitarista de Joan Junceda. Con ocasión del llamado "Banquete de la Victoria" celebrado por la Lliga Regionalista por su triunfo en las elecciones municipales de ese mismo mes, publicó una caricatura en la que se veía un civil y un militar vestido de húsar, observando el banquete, con el siguiente diálogo: -¿Qué se celebra aquí que hay tanta gente?, -El Banquete de la Victoria, -¿De la victoria?, Ah, pues vaya, serán paisanos.

Fue una prueba de la debilidad del régimen de la Restauración. Costó la dimisión del jefe de gobierno, Eugenio Montero Ríos, y la aprobación de la llamada Ley de Jurisdicciones, que entregaba el enjuiciamiento de todos los delitos «contra la patria o el ejército» a la justicia militar.

A raíz del rechazo hacia esta ley los partidos catalanistas se unirían en lo que sería Solidaritat Catalana. Desde entonces el mapa electoral catalán cambió substancialmente: fue el fin de los partidos dinásticos de la Restauración y el triunfo de los partidos de oposición al régimen. El juego político en Cataluña se repartió entre la Lliga Regionalista y los partidos republicanos.

SAN 算額 GAKU

Recientemente me he distraído con la resolución de los problemas geométricos recogidos en el trabajo de **Francisco Javier García Capitán** titulado **Problemas San Gaku,** trabajo que puede encontrarse en esta página de Internet: http://garciacapitan.auna.com/problemas/sangaku1

Hasta hace poco desconocía la existencia de estos problemas y el significado de tal nombre. Picado por la curiosidad he recabado información sobre el tema navegando por Internet.

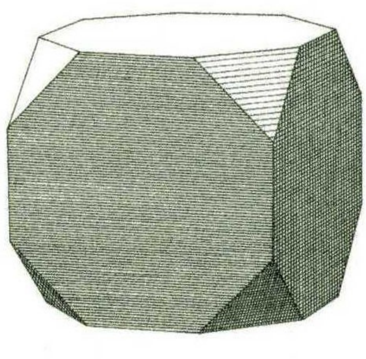
San gaku es una expresión japonesa que significa “tablilla matemática”. Estas tablillas de madera pueden llamarse realmente matemáticas pues en ellas, los japoneses del periodo Edo, siglos XVII y XVIII, en que Japón mantuvo un férreo aislamiento de occidente, y por supuesto de los matemáticos europeos, inscribían determinados problemas, principalmente geométricos, para presentarlos como ofrenda votiva a sus dioses colgando las tablillas a la entrada de los templos. Así pues los problemas llamados san gaku son los que se han encontrado grabados sobre estas tablillas de las que muchas se han perdido en el transcurso del tiempo, no obstante existen en la actualidad unas 880; la más antigua data de 1683.

En 1989 los matemáticos H. Fukagawa y D. Pedoe editaron un trabajo titulado **Japanese Temple Geometry Problems: Sangaku**, que constituye la primera colección de problemas san gaku fuera de Japón.

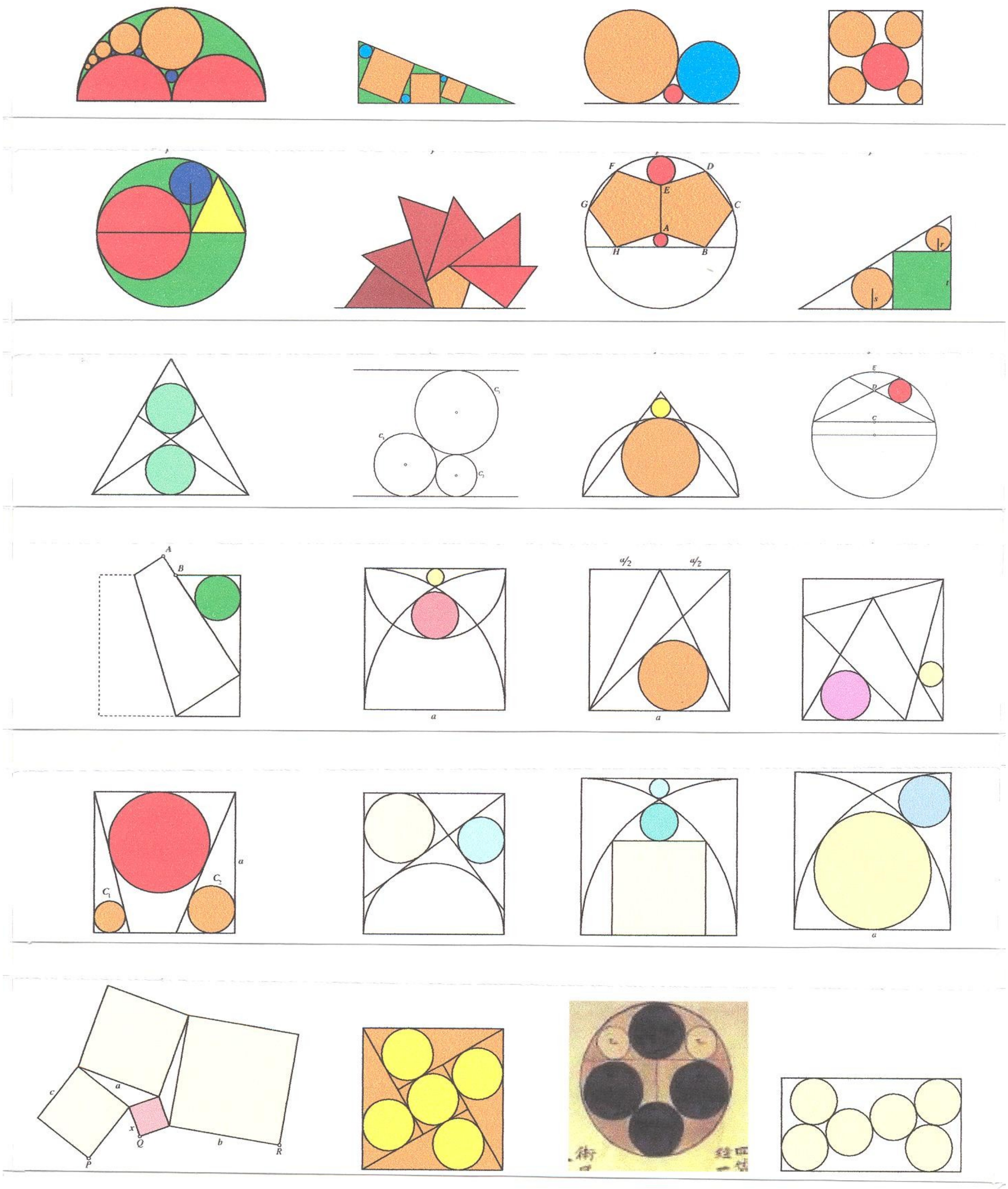
En una misma tablilla podía haber varios problemas que, en general, son de aparente simplicidad, aunque algunos requieren para su solución utilizar matemáticas superiores. Las figuras se dibujaban con colores vivos. En la tablilla se incluía junto al enunciado la solución, aunque no el procedimiento a seguir para llegar a ella.

Recojo a continuación, tomada del mencionado trabajo de García Capitán, una pequeña colección de figuras relativas a problemas san gaku.

El problema de la fila 4, columna 2, titulado **El ángel con la hogaza**, pide hallar los radios de los dos círculos coloreados en función del lado del cuadrado. El de la fila 3, columna 1: **Dos círculos gemelos**, pide encontrar el radio común a estos dos círculos. El de la fila 4, columna 1: **La moneda y la servilleta doblada**, pide demostrar que el radio de la moneda es igual a AB. El de la fila 6, columna 2: **Cinco círculos gemelos en un cuadrado,** pide hallar el radio de estos 5 círculos en función del lado del cuadrado. El de la Fila 6, columna 4: **Seis círculos en un rectángulo**, pide calcular las dimensiones de éste siendo la unidad los diámetros de los 6 círculos. Etc.



Algunas figuras de problemas San Gaku.



Aristogeronte.
Madrid. Nov.2008

EL EXPERIMENTO DE LAS URNAS CON BOLAS

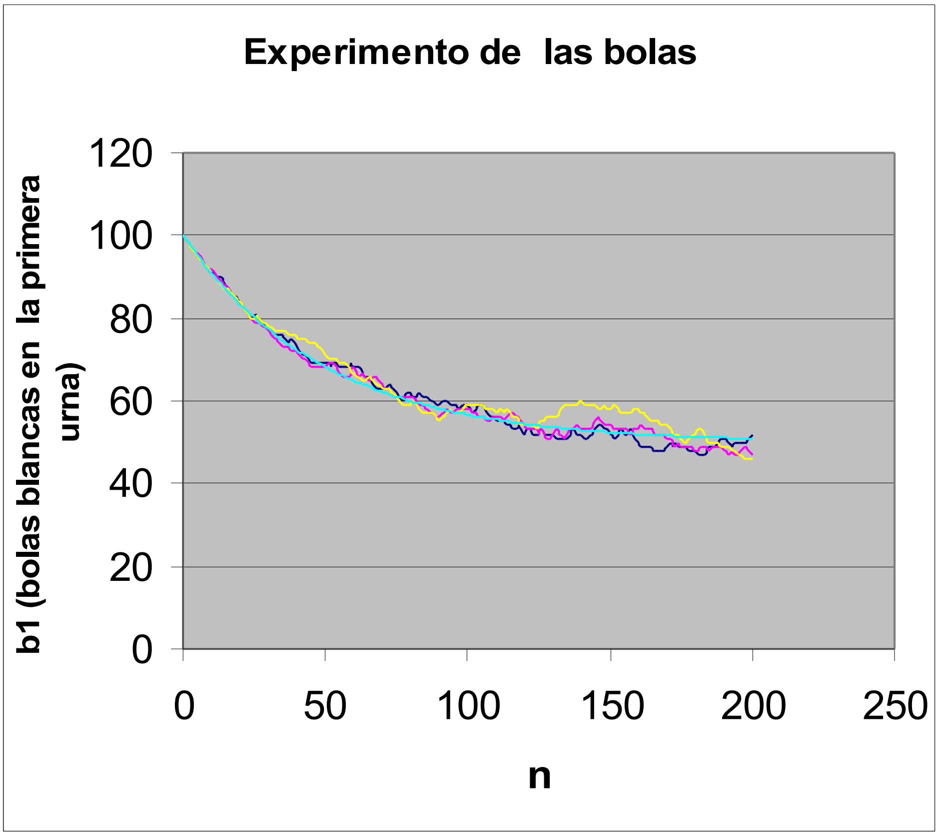
Tenemos dos urnas, la primera con 100 bolas blancas y la segunda con 100 bolas negras. Simultáneamente tomamos una bola de cada urna y la pasamos a la otra, repitiendo el proceso sucesivamente. Cada urna se irá "tiñendo" del color contrario al inicial, hasta llegar un momento en que cada una contendrá unas 50 bolas blancas y 50 negras. Estudiar la velocidad a la que avanzará el proceso.

SOLUCIÓN

Es evidente que, al principio, prácticamente todas las bolas que llegarán a la urna de blancas serán negras, y viceversa, par lo que el proceso avanzará aprisa. Pero pronto empezarán a llegar a cada urna bolas "de vuelta", y se atemperará la velocidad de la tinción. Es claro que, asintóticamente, se tenderá al valor 50/50 para cada urna.

Dadas las condiciones iniciales, se cumplirá en todo momento (tras una ida y una vuelta) que en cada urna las bolas blancas y las negras sumarán 100, y además el número de blancas de la primera será igual al de negras en la segunda, por lo que nos basta con estudiar el primer valor. Sea éste x(n) tras 1a n^{sima} extracción.

El estudio del proceso es ciertamente difícil por el cálculo de las probabilidades de elección de las bolas en cada extracción, pues éstas variarán en función de los resultados previos. Pero existe un procedimiento más simplificado: *estudiar la evolución de los valores medios de x(n).*



Efectivamente, al realizar la extracción $(n + 1)^{sima}$ pasarán a la primera urna, *por término medio,* [100-*x(n)*]/100 bolas blancas y *x(n)*/100 bolas negras, mientras que pasarán a la segunda urna *x(n)*/100 bolas blancas y [100-*x(n)*]/100 bolas negras. Con lo que el balance será:

$$x(n+1) = x(n) + (100-x(n)]/100 - x(n)/100 = 0{,}98x(n) - 1$$

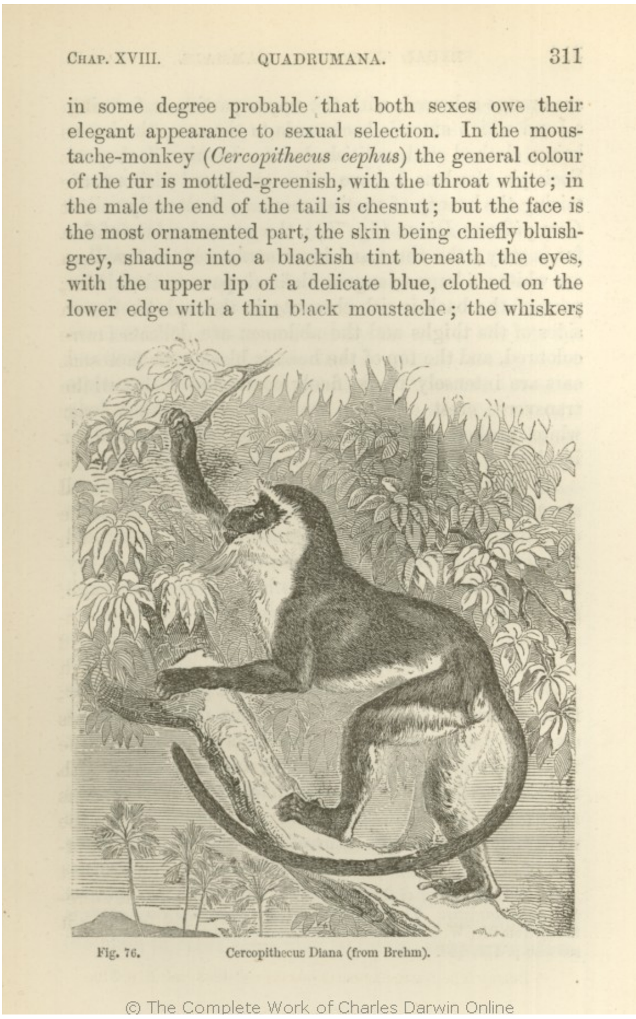
De donde resulta fácilmente:

$$x(n) = 50 + 51 \cdot 0{,}98^{n}$$

Podemos efectuar una prueba por el método de Monte-Carlo para verificar la fiabilidad del método. Efectuado en tres supuestos distintos, se llega a las gráficas de la figura, que no difieren mucho de la teórica.

Con todo, una duda me impide ser feliz: ¿Es el método lo suficientemente riguroso? Me gustaría que alguien pudiera darme respuesta. Desde luego, la fórmula prohíbe, por ejemplo, que en algún momento las blancas de la primera lleguen a ser menos de 50, cosa perfectamente posible en la realidad.

JMAiO, jul 96



CHAP. XVIII. QUADRUMANA. 311

in some degree probable that both sexes owe their elegant appearance to sexual selection. In the moustache-monkey (*Cercopithecus cephus*) the general colour of the fur is mottled-greenish, with the throat white; in the male the end of the tail is chesnut; but the face is the most ornamented part, the skin being chiefly bluish-grey, shading into a blackish tint beneath the eyes, with the upper lip of a delicate blue, clothed on the lower edge with a thin black moustache; the whiskers

Fig. 76. Cercopithecus Diana (from Brehm).

APOLONIO DE PERGE.

Quitémonos el sombrero ante uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Su nombre es Apolonio de Perge, al que vamos a dedicar estas líneas.

Perge o Perga es actualmente un lugar arqueológico visitado por los turistas. Las ruinas que aun pueden contemplarse de esta antigua ciudad griega, una de las principales de la **Panfilia**, son: un gran teatro que daba cabida a unas 13.000 personas, una palestra, el templo de Artemisa y restos de murallas. Más de dos siglos después del nacimiento de Apolonio, apareció por Perge, un personaje clave en la historia del cristianismo, **Pablo de Tarso**, que hizo por mar este su primer viaje misionero. El lugar recibe actualmente el nombre de **Murtana** y se encuentra a unos 18 km al nordeste de la ciudad de **Antalya** en la costa sur de la península de Anatolia. Cerca de Antalya se pueden visitar también otras ruinas griegas: **Aspendo** y **Side**.

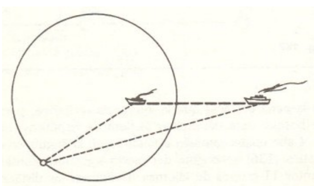
La ciudad de Perge fue la cuna de **Apolonio** que vivió aproximadamente entre el 262 y el 190 a C. Apolonio es el tercero, cronológicamente, del trío de grandes matemáticos griegos de la Edad de Oro tras **Euclides** y **Arquímedes**. Se le conoció como *El gran geómetra*. Estudió en Alejandría y más tarde residió en Éfeso y Pérgamo.

En la época de Apolonio, los geómetras griegos empezaron a estudiar nuevas curvas, las cónicas. El trabajo de Apolonio sobre ellas es su obra más relevante; lo publicó en ocho libros de los cuales sólo los 4 primeros nos han llegado en su forma original griega, los siete primeros nos llegaron también en árabe y el octavo está perdido. El título que dio a estos libros fue el de **Cónicas** o curvas resultantes de la intersección de un plano con una superficie cónica, curvas que él denominó con los conocidos nombres de **hipérbola, parábola** y **elipse**. Esta extraordinaria obra de Apolonio nunca fue superada en cantidad y calidad hasta la publicación a finales del S. XVII del libro **Sectiones Conicae** del matemático francés **La Hire.**

Probablemente nos hemos preguntado alguna vez por la etimología de estos familiares nombres, pero es difícil dar una respuesta adecuada. Posiblemente deriven de la relación de las diferentes inclinaciones del plano que secciona al cono, con el ángulo **a** que forma la generatriz de éste con su base. Si el plano es trazado “junto a” o “a lo largo de” (paraballein) la generatriz, obtenemos la **parábola**; si el plano es trazado con inclinación inferior a **a** o “deficitaria” (elleiyij) obtenemos la **elipse**; si el plano es trazado “más allá”, “superando” (uperbolh) al ángulo **a**, obtenemos la **hipérbola.**

Hay un problema geométrico notable que consiste en construir un círculo tangente a otros tres dados. Esta cuestión ha ocupado a numerosos geómetras, pero la primera solución se atribuye a nuestro geómetra por lo que es conocida como **Problema de Apolonio**. La construcción sería susceptible de aplicarse a los 9 casos particulares resultantes de reemplazar por rectas o puntos uno o varios de los círculos dados.

Otro descubrimiento de Apolonio nos muestra que el lugar geométrico de los puntos tales que sus distancias a otros dos fijos están en una proporción dada es una circunferencia. Este lugar es conocido como **Círculo de Apolonio.** Este círculo nos permite resolver el problema de la persecución. Si un barco más rápido que otro, ambos con velocidades constantes, quiere darle alcance en el menor tiempo posible, y en el supuesto de que el perseguido navegue en línea recta, aquel deberá dirigir su rumbo al punto de intersección de la ruta del barco lento con el círculo de Apolonio.



Aristogeronte.
Madrid. Dic. 2008.

Bibliografía: El mundo antiguo. Aldo Mieli. Espasa-Calpe Argentina. 1945.
Traité de Geometrie. E. Rouché. Gauthier-Villars. 1935.
Quien es quien en la ciencia. Dragoni, Bergia, Gottardi. Acento Editorial. 2004.

Problemas matemáticos de distinta índole han acompañado siempre a nuestra revista Carrollia. Como gesto de despedida hemos querido presentar esta incursión en un aspecto que cuestiona la esencia misma de la matemática: ¿se trata exclusivamente de una creación de la mente humana, que ha evolucionado gracias a ese fenómeno de agregación cultural que opera mediante lo que se ha dado en llamar memes? ¿O hay razones para creer que se trata de verdades universales que están realmente ahí afuera, y los matemáticos serían entonces meros descubridores de esos secretos? Y, lo más sorprendente de todo, ¿por qué la descripción del mundo físico se ajusta tan asombrosamente a la formulación matemática? Las consideraciones que siguen corresponden a una charla dada por Eugene Wigner (1902 — 1995), que recibió el nobel de Física en 1963.

La irrazonable eficacia de la matemática en las ciencias naturales

por Eugene Wigner (traducción: P. Crespo, nov 2004)

«The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», publicado en «Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I (Febrero 1960)». New York: John Wiley & Sons, Inc.

Las matemáticas, consideradas correctamente, poseen no solamente verdad, sino una suprema belleza fría y austera, como la de una escultura, que no apela a ningún aspecto de nuestra más débil naturaleza, y que carece de los primorosos atavíos de la pintura o de la música, aunque es de una pureza sublime y capaz de una perfección rigurosa como solamente puede exhibir el arte más elevado. El verdadero espíritu del deleite, de la exaltación, del sentimiento de ser más que humano, que es la piedra de toque de la más alta perfección, ha de buscarse en las matemáticas al igual que en la poesía.

—BERTRAND RUSSELL, Study of Mathematics

Existe un relato acerca de dos amigos que habían sido compañeros de clase durante sus estudios de escuela secundaria y que hablan acerca de sus trabajos actuales. Uno de ellos se ha convertido en un estadístico y se ocupa de las tendencias de la población. Muestra un ejemplar publicado de su trabajo a su antiguo compañero. El trabajo comienza, como es usual, con la distribución gaussiana, y el estadístico explica a su amigo el significado de los símbolos relativos a la población real, a la población promedio, etcétera. Su compañero se mostraba algo incrédulo y no estaba muy seguro de que su amigo no le estuviera tomando el pelo. «¿Cómo puedes saber eso?» indagó. «¿Y qué símbolo es éste de aquí?» «Ah, —contestó el estadístico— se trata de pi». «¿Y eso qué es?» «La razón de la circunferencia a su diámetro». «Vaya, ahora estás llevando la broma demasiado lejos —dijo su antiguo compañero— pues estoy seguro de que la población no tiene nada que ver con la circunferencia».

Como es natural, nos sentimos inclinados a sonreír ante la ingenuidad del antiguo compañero de clase. No obstante, cuando escuché esta historia, tuve que admitir un sentimiento de escalofrío porque, con seguridad, la reacción del condiscípulo deja traslucir solamente el sentido común más llano. Quedé aún más confundido cuando, no muchos días más tarde, alguien me expresó su desconcierto [1 La observación que se cita a continuación se debe a F. Werner, en sus tiempos de estudiante en

Princeton] por el hecho de que hacemos una selección bastante estrecha cuando elegimos los datos que han de verificar nuestras teorías. «¿Cómo podemos estar seguros de que si establecemos una teoría que enfoque su atención en los fenómenos que desdeñamos y que desdeñe algunos de los fenómenos que ahora reclaman nuestra atención, no podemos construir otra teoría que tenga poco en común con la presente pero que sin embargo explique tantos fenómenos como ella?» Debemos admitir que no tenemos evidencia definitiva de que no exista una teoría tal.

Las dos historias precedentes ilustran los dos puntos de vista principales objeto del presente discurso. El primer punto es que los conceptos matemáticos se revelan en conexiones completamente inesperadas. Es más, con frecuencia permiten una descripción sorprendentemente precisa de los fenómenos involucrados en tales conexiones. En segundo lugar, y precisamente debido a dicha circunstancia, y puesto no que entendemos las razones de su utilidad, no podemos saber si una teoría formulada en términos de conceptos matemáticos es la única correcta. Estamos en una posición comparable a la de alguien al que se le ha entregado un manojo de llaves y que, teniendo que abrir varias puertas de modo sucesivo, acierta siempre con la llave correcta al primer o segundo intento. Se volverá escéptico en relación con la unicidad de la coordinación entre las llaves y las puertas.

La mayor parte de lo que se dirá sobre estas cuestiones no será nuevo; se le habrá ocurrido probablemente de una forma u otra a la mayoría de los científicos. Mi intención principal es iluminarlas desde diversas vertientes. El primer punto es que la enorme utilidad de la matemática en las ciencias naturales es algo rayano en el misterio, y que no existe ninguna explicación racional para ello. En segundo lugar, justamente a causa de esta portentosa utilidad de los conceptos matemáticos, surge la cuestión de la unicidad de nuestras teorías físicas. Con el fin de establecer el primer punto, el de que la matemática desempeña un papel de importancia irrazonable en la física, será útil decir algunas palabras sobre la pregunta ¿qué es la matemática?, seguida de la ¿qué es la física?, a continuación, cómo la matemática se incorpora a las teorías físicas, y por último, por qué el éxito de la matemática en su papel en la física parece ser tan desconcertante. Mucho menos se dirá acerca del segundo punto: la unicidad de las teorías de la física. Una respuesta apropiada a esta cuestión requeriría un trabajo teórico y experimental elaborado que no ha sido llevado a cabo hasta ahora.

¿Qué es la matemática?

Alguien dijo una vez que la filosofía es el abuso de una terminología que se inventó precisamente con ese propósito. [2. Esta frase está citada aquí del libro de W. Dubislav «Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart» (Berlin: Junker and Dunnhaupt Verlag, 1932), p. 1.] En el mismo sentido, yo diría que la matemática es la ciencia de operaciones expertas con conceptos y reglas inventados justamente con dicho fin. La matemática pronto se marginaría de teoremas interesantes si éstos se tuvieran que formular en términos de los conceptos que aparecen en los axiomas. Es más, si bien es una verdad incuestionable que los conceptos de la matemática elemental y en particular de la geometría elemental fueron formulados para describir entidades directamente sugeridas por el mundo real, ello no parece ser cierto en lo que se refiere a conceptos más avanzados, en particular los que representan un papel tan importante en la física. Así, las reglas para las operaciones con pares de números están diseñadas obviamente para dar los mismos resultados que las operaciones con fracciones que aprendimos primero sin referencia a «parejas de números». Las reglas para las operaciones con series, es decir, con números irracionales, pertenecen todavía a la categoría de reglas que fueron determinadas cuidando de reproducir las reglas de las operaciones con cantidades que ya nos eran conocidas. Conceptos matemáticos mucho más avanzados, tales como los números complejos, las diversas álgebras, los operadores lineales, los conjuntos de Borel (y esta lista podría continuar casi indefinidamente), fueron ideados por ser asuntos adecuados en los cuales el matemático puede demostrar su ingenio y sentido de la belleza formal. De hecho, la definición de tales conceptos, con la noción de que se pueden aplicar a ellos consideraciones ingeniosas e interesantes, es la primera demostración de la destreza del matemático que los define. La profundidad del pensamiento implícita en la formulación de los conceptos matemáticos se justifica después por la destreza con la que se emplean. El gran matemático saca provecho por completo, casi implacablemente, del dominio del razonamiento permisible y roza el no permisible. El que su temeridad no le conduzca a un terreno pantanoso de contradicciones es un milagro en sí mismo: es ciertamente difícil de creer que nuestra capacidad de razonamiento haya sido conducido, por el proceso darviniano de la selección natural, a la perfección que parece poseer. No es éste, sin embargo, nuestro objetivo presente. El punto principal que recordaremos más tarde es que el matemático podría formular solamente un conjunto de teoremas interesantes sin definir conceptos más allá de los que están contenidos en los axiomas, y que los conceptos que están fuera de los contenidos en los axiomas se definen con vistas a permitir sutiles operaciones lógicas que apelan a nuestro sentido estético, tanto en cuanto tales operaciones como también en cuanto a sus resultados de gran generalidad y sencillez. [3 M. Polanyi, en su «Personal Knowledge (Chicago: University of Chicago Press, 1958)», dice: «Todas esas dificultades no son sino consecuencia de nuestro rechazo de tratar de ver que la matemática no puede definirse sin el reconocimiento de su característica más obvia, es decir, que es interesante» (p 188).]

Los números complejos proporcionan un ejemplo particularmente llamativo de lo anterior. Nada en nuestra experiencia, ciertamente, sugiere la introducción de tales cantidades. En realidad, si a un matemático se le pide que justifique su interés en los números complejos, indicará con cierta indignación los muchos y bellos teoremas de la teoría de ecuaciones, de las series de potencias y de las funciones analíticas en general, que deben su origen a la introducción de los números complejos. El matemático no desea abandonar su interés en estos los logros más bellos de su talento. [4 El lector podría estar interesado, en relación con esto, en los comentarios bastante irritados de Hilbert acerca del intuicionismo, que «tratan de destrozar y de desfigurar las matemáticas» Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg, 157 (1922), o Gesammelte Werke (Berlin: Springer, 1935), p. 188.]

¿Qué es la física?

El físico está interesado en descubrir las leyes de la naturaleza inanimada. Con el fin de comprender esta frase, es necesario analizar el concepto «ley de la naturaleza».

El mundo que nos rodea es de una complejidad desconcertante y el hecho más obvio en relación con ello es que no podemos predecir el futuro. A pesar de que el chiste atribuye solamente al optimista la opinión de que el futuro es incierto, éste tiene razón en este caso: el futuro es impredecible. Es un milagro, como ha señalado Schrödinger, que a pesar de la perturbadora complejidad del mundo, puedan descubrirse en los fenómenos ciertas regularidades. Una regularidad tal, descubierta por Galileo, es que dos piedras, dejadas caer a la vez desde la misma altura, alcanzan el suelo al mismo tiempo. Las leyes de la naturaleza conciernen a tales regularidades. La regularidad de Galileo es un prototipo de un conjunto mayor de regularidades. Se trata de una regularidad sorprendente, y ello por tres razones.

La primera razón por la que es sorprendente es que se cumple no solamente en Pisa, y en la época de Galileo, sino que es cierta en todos los lugares de la Tierra, siempre ha sido cierta, y siempre será cierta. La propiedad de la regularidad es una propiedad reconocida de invariancia y, como tuve ocasión de señalar hace algún tiempo, sin principios de invariancia similares a los que están implícitos en la generalización anterior de la observación de Galileo, la física no hubiera sido posible. La segunda característica sorprendente es que la regularidad de la que estamos tratando es independiente de muchísimas condiciones que podrían tener efecto sobre la misma. Es válida con independencia de que llueva o no, de que el experimento se lleve a cabo en una habitación o desde la Torre Inclinada, de si la persona que deja caer las rocas es hombre o mujer. Es válida incluso en el caso de que las dos rocas se dejen caer, simultáneamente y desde la misma altura, por dos personas distintas. Existen, como es obvio, otras innumerables condiciones que son del todo intrascendentes en lo que hace a la validez de la regularidad de Galileo. La irrelevancia de tantas circunstancias que podrían ejercer un papel en el fenómeno observado ha sido calificada también de invariancia. Esta invariancia, sin embargo, es de un tipo distinto del precedente, puesto que no puede formularse como un principio general. La exploración de las condiciones que ejercen o no su influencia sobre un fenómeno es parte de la primera exploración de un campo de actividad. La destreza y el ingenio del experimentador le harán ver los fenómenos que dependen de un conjunto relativamente reducido de condiciones relativamente fáciles de llevar a cabo y de reproducir. [5 En relación con esto véase el ensayo gráfico de M. Deutsch, Daedalus 87, 86 (1958). A. Shimony ha llamado mi atención sobre un pasaje semejante de la obra de C. S. Peirce «Essays in the Philosophy of Science» (New York: The Liberal Arts Press, 1957), p. 237.] En el caso presente, la restricción de Galileo de sus observaciones a cuerpos relativamente pesados fue el paso más importante en este aspecto. Es cierto de nuevo que si no hubiera fenómenos que fueran independientes de todas excepto un conjunto realizablemente pequeño de condiciones, la física hubiera sido imposible.

Los dos puntos anteriores, aunque altamente significativos desde el punto de vista del filósofo, no son los que más sorprendieron a Galileo, ni tampoco contienen una ley específica de la naturaleza. La ley de la naturaleza está contenida en la afirmación de que el tiempo que tarda un objeto pesado en caer desde una altura determinada es independiente del tamaño, material y forma del cuerpo que cae. En el marco de la segunda «ley» de Newton, esto equivale a la afirmación de que la fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo que cae es proporcional a su masa pero independiente del tamaño, composición y forma del cuerpo que cae.

El argumento anterior intenta recordarnos, en primer lugar, que no es en absoluto natural que existan «leyes de la naturaleza», y mucho menos que seamos capaces de descubrirlas. [6 E. Schroedinger, en su «What Is Life?» (Cambridge: Cambridge University Press, 1945), p. 31, dice que este segundo milagro podría estar muy bien más allá del entendimiento humano]. El que esto escribe tuvo la ocasión, hace cierto tiempo, de llamar la atención sobre la serie de capas de «leyes de la naturaleza», cada una de las cuales contiene leyes más generales y más incluyentes que la previa, y su descubrimiento constituye una penetración más profunda en la estructura del universo que las capas previamente reconocidas. Sin embargo, el punto que resulta más significativo en el presente contexto es que dichas leyes de la naturaleza contienen, en sus consecuencias más remotas, solamente una parte pequeña de nuestro conocimiento del mundo inanimado. Todas las leyes de la naturaleza son afirmaciones condicionales que permiten una predicción de algunos sucesos futuros sobre la base del conocimiento del presente, con la excepción de que algunos aspectos del estado presente del mundo, en la práctica la inmensa mayoría de los determinantes del estado presente del mundo, son irrelevantes desde el punto de vista de la predicción. La irrelevancia es significativa en el sentido del segundo punto tratado en relación con el teorema de Galileo. [7 Creemos innecesario mencionar que el teorema de Galileo, tal como se ha enunciado en el texto, no agota el contenido de sus observaciones en relación con las leyes de la caída de los cuerpos.]

En lo que se refiere al estado presente del mundo, tal como la existencia de la Tierra en la que vivimos y en la cual se llevaron a cabo los experimentos de Galileo, la existencia del Sol y de la totalidad de nuestro entorno, las leyes de la naturaleza no dicen absolutamente nada. Es en consonancia con esto, en primer lugar, que se pueden utilizar las leyes de la naturaleza para predecir acontecimientos futuros solamente bajo circunstancias excepcionales, cuando se conocen todos los factores relevantes del estado presente del mundo. En correspondencia con esto también la construcción de máquinas, cuyo funcionamiento se puede prever, constituye el logro más espectacular del físico. En tales máquinas el físico crea una situación en la cual se conocen todas las coordenadas relevantes, de tal modo que puede predecirse el comportamiento de la máquina. Los radares y los reactores nucleares son ejemplos de tales máquinas.

La finalidad principal de la argumentación anterior es señalar que las leyes de la naturaleza son siempre afirmaciones condicionales y que se refieren solamente a una parte muy pequeña de nuestro conocimiento del mundo. Así, la mecánica clásica, que es el prototipo mejor conocido de una teoría física, proporciona las derivadas segundas de las coordenadas de la posición de todos los cuerpos, en base al conocimiento de las posiciones, etc. de tales cuerpos. No proporciona información sobre la existencia, las posiciones presentes o las velocidades de dichos cuerpos. Debería mencionarse, en aras a la precisión, que descubrimos hace unos treinta años que incluso las afirmaciones condicionales no pueden ser del todo precisas, puesto que dichas afirmaciones son leyes de probabilidad que nos permiten solamente apuestas inteligentes acerca de las propiedades futuras del mundo inanimado, basadas en el conocimiento de su estado presente. No nos permiten hacer afirmaciones categóricas, ni tampoco afirmaciones condicionales categóricas acerca del estado presente del mundo. La naturaleza probabilística de las «leyes de la naturaleza» se manifiesta por sí misma también en el caso de las máquinas, y se puede verificar, al menos en el caso de los reactores nucleares, cuando funcionan a muy baja potencia. Sin embargo, la limitación adicional del alcance de las leyes de la naturaleza que se deriva de su carácter probabilista no representa ningún papel en el resto de la discusión.

El papel de la matemática en las teorías físicas

Habiendo recordado la esencia de la matemática y la física, deberíamos estar en una mejor posición para pasar revista al papel de la matemática en las teorías físicas.

Naturalmente, utilizamos la matemática en la física cotidiana para evaluar los resultados de las leyes de la naturaleza, para aplicar las afirmaciones condicionales a las condiciones particulares que resultan prevalecer o bien nos interesan. Con el fin de que ello sea posible, las leyes de la naturaleza deben estar formuladas previamente en lenguaje matemático. Sin embargo, el papel de evaluar las consecuencias de teorías ya establecidas no es el más importante de la matemática en la física. La matemática o, más bien, la matemática aplicada, no es tanto la dueña de la situación en esta función, sino que sirve meramente como herramienta.

La matemática representa también, sin embargo, un papel más soberano en la física. Esto estaba ya implícito en las afirmaciones efectuadas al discutir el papel de la matemática aplicada, según las cuales las leyes de la naturaleza deben haber sido formuladas en el lenguaje de la matemática para que puedan ser objeto del uso de la matemática aplicada. La declaración de que las leyes de la naturaleza están escritas en el lenguaje de la matemática fue realizada adecuadamente hace trescientos años; [8 Se atribuye a Galileo] es ahora más cierta que nunca antes. Con el fin de mostrar la importancia que los conceptos matemáticos poseen en la formulación de las leyes de la física, recordemos por ejemplo los axiomas de la mecánica cuántica tal como fueron formulados explícitamente por el gran físico Dirac. Hay dos conceptos básicos en la mecánica cuántica: estados y observables. Los estados son vectores del espacio de Hilbert, los observables operadores autoadjuntos de dichos vectores. Los valores posibles de las observaciones son los valores característicos de los operadores, pero debemos detenernos aquí para no sumergirnos en una relación de los conceptos matemáticos desarrollados en la teoría de los operadores lineales.

Es cierto, naturalmente, que la física elige ciertos conceptos matemáticos para la formulación de las leyes de la naturaleza, y seguramente utiliza solamente una fracción de todos los conceptos matemáticos. Es cierto asimismo que los conceptos elegidos no fueron seleccionados arbitrariamente de una lista de términos matemáticos, sino que se desarrollaron, en muchos si no en todos los casos, independientemente por el físico y luego se reconocieron como concebidos con anterioridad por el matemático. No es cierto, sin embargo, lo que se dice con frecuencia, y es que ello había de ser así puesto que la matemática utiliza los conceptos más simples y que por tanto están destinados a aparecer en cualquier formalismo. Como vimos antes, los conceptos de la matemática no se eligen por su sencillez conceptual, aunque series de pares de números están lejos de ser los conceptos más simples, sino por su tendencia a manipulaciones inteligentes y a razonamientos notables y brillantes. No olvidemos que el espacio de Hilbert de la mecánica cuántica es el espacio de Hilbert complejo, con un producto escalar hermítico. Es seguro que para la mente despreocupada los números complejos están lejos de lo natural y lo sencillo, y no pueden resultar sugeridos por las observaciones físicas. Más aún, el uso de números complejos no es en este caso un truco de cálculo de la matemática aplicada, sino que está muy cerca de ser una necesidad en la formulación de las leyes de la mecánica cuántica. Finalmente, ahora comienza a revelarse que no solamente los números complejos sino que también las llamadas funciones analíticas están destinadas a ejercer un papel decisivo en la formulación de la teoría cuántica. Me refiero a la teoría de las relaciones de dispersión, en rápido desarrollo.

Es difícil evitar la impresión de que aquí nos enfrentamos a un milagro, completamente comparable en su asombrosa naturaleza al milagro de que la mente humana sea capaz de enlazar un millar de razonamientos sin caer en contradicciones, o a los dos milagros de la existencia de leyes de la naturaleza y de la capacidad de la mente humana para adivinarlas. La observación que más se acerca a una explicación del surgimiento de los conceptos matemáticos en física que conozco es la declaración de Einstein de que las únicas teorías físicas que deseamos aceptar son las bellas. Hay que estar alerta para discutir que los conceptos de la matemática, que invitan al ejercicio de tanto ingenio, tienen la cualidad de la belleza. Sin embargo, la observación de Einstein puede explicar más bien las propiedades de teorías que estamos dispuestos a creer y no hace referencia a la precisión intrínseca de la teoría. Volveremos, por consiguiente, a esta última cuestión.

¿Es en realidad sorprendente el éxito de las teorías físicas?

Una posible explicación del uso de la matemática por parte del físico para formular sus leyes de la naturaleza es la de que en cierto sentido es una persona irresponsable. Como resultado, cuando encuentra una conexión entre dos cantidades que semejan una conexión bien conocida de la matemática, concluye que la conexión es la tratada en la matemática simplemente porque no conoce otra conexión parecida. No es la intención de la presente discusión refutar la acusación de que el físico es una persona irresponsable. Quizás lo sea. Importa sin embargo señalar que la formulación matemática de la con frecuencia cruda experiencia del físico conduce en un extraño número de casos a una descripción asombrosamente precisa de un conjunto grande de fenómenos. Esto muestra que el lenguaje matemático es más que recomendable como el único lenguaje que podemos hablar; muestra que se trata, en un sentido verdaderamente real, del lenguaje correcto. Consideremos unos pocos ejemplos.

El primer ejemplo es el frecuentemente citado del movimiento planetario. Se consiguió establecer bastante bien las leyes la caída de los cuerpos, como resultado de experimentos llevados a cabo principalmente en Italia. Tales experimentos no podían ser muy precisos en el sentido según el cual entendemos actualmente la precisión, en parte debido al efecto de la resistencia del aire y en parte debido a la imposibilidad, en aquella época, de medir intervalos de tiempo cortos. A pesar de ello, no sorprende que, como resultado de sus estudios, los científicos italianos adquirieran familiaridad con los modos según los cuales los objetos viajan a través de la atmósfera. Fue Newton quien más tarde relacionó la caída libre de los cuerpos con el movimiento de la Luna, advirtiendo que la parábola de la trayectoria de una piedra lanzada sobre la Tierra y la trayectoria circular de la Luna en el cielo son casos particulares del mismo objeto matemático de una elipse, y postuló la ley universal de la gravitación sobre la base de una única, y en aquel tiempo muy aproximada, coincidencia numérica. Filosóficamente, la ley de la gravitación tal como fue formulada por Newton era rechazable para su época y para él mismo. Empíricamente, estaba basada en muy escasas observaciones. El lenguaje matemático en el que estaba formulada contenía el concepto de una derivada segunda, y los que hemos intentado dibujar un círculo osculatriz de una curva sabemos que la segunda derivada no es un concepto muy inmediato. La ley de la gravitación que Newton estableció con reluctancia y que pudo verificar con una precisión de cerca de un 4% demostró ser precisa en menos de una diezmilésima por ciento y se asoció tan cercanamente con la idea de la precisión absoluta que sólo recientemente los físicos se han vuelto lo bastante audaces como para inquirir las limitaciones de esa precisión. [9 Véase, por ejemplo, R. H. Dicke, Am. Sci., 25 (1959).] Ciertamente, el ejemplo de la ley de Newton, tantas veces citado, debe mencionarse primero como un ejemplo monumental de una ley, formulada en términos que parecen sencillos al matemático, que ha demostrado ser precisa más allá de las expectativas razonables. Permítasenos recapitular nuestra tesis en este ejemplo: en primer lugar, la ley, desde el momento en que en ella aparece una segunda derivada, es solamente sencilla para el matemático, no para el sentido común ni para el hombre corriente de mentalidad no matemática; en segundo lugar, es una ley condicional de alcance bastante limitado. No explica nada acerca de la Tierra que atrae a las piedras de Galileo, ni acerca de la forma circular de la órbita de la Luna, ni en relación con los planetas del sistema solar. La explicación de esas condiciones iniciales se deja al geólogo y al astrónomo, que tienen con ellas una dura tarea.

El segundo ejemplo pertenece a la mecánica cuántica elemental ordinaria. Se originó cuando Max Born advirtió que algunas de las reglas de cálculo dadas por Heisenberg estaban formuladas de modo idéntico que las reglas del cálculo con matrices, establecidas hacía mucho tiempo por los matemáticos. Born, Jordan y Heisenberg se propusieron entonces reemplazar por matrices las variables posición e impulso de las ecuaciones de la mecánica clásica. Aplicaron las reglas de la mecánica de matrices a unos pocos problemas muy idealizados y los resultados fueron bastante satisfactorios. No obstante, no había, en aquella época, evidencia racional de que su mecánica de matrices pudiera resultar correcta bajo condiciones más realistas. En realidad, dijeron «la mecánica tal como se ha propuesto aquí debería ser ya correcta en sus trazos esenciales». De hecho, la primera aplicación de su mecánica a un problema real, el del átomo de hidrógeno, fue hecha varios meses más tarde por Pauli. Esta aplicación proporcionó resultados en acuerdo con la experiencia. Ello fue satisfactorio pero todavía inexplicable porque las reglas de cálculo de Heisenberg estaban sacadas de problemas que incluían la antigua teoría del átomo de hidrógeno. El milagro ocurrió solamente cuando la mecánica de matrices, y una teoría matemática equivalente a ella[1], se aplicó a problemas para los cuales las reglas de cálculo de Heisenberg no eran significativas. Las reglas de Heisenberg presuponían que las ecuaciones clásicas del movimiento tenían soluciones con ciertas propiedades periódicas; y las ecuaciones del movimiento de los dos electrones del átomo de helio, o del número todavía mayor de electrones de átomos más pesados, simplemente no tienen tales propiedades, de modo que las reglas de Heisenberg no pueden aplicarse en tales casos. Sin embargo, el cálculo del nivel de menor energía del helio, tal como lo realizaron hace algunos meses Kinoshita en Cornell y Bazley en el Bureau of Standards, coincide con los datos experimentales dentro de la precisión de las observaciones, que es de una parte en

[1] Se refiere seguramente a la formulación de tipo ondulatorio de Schrödinger (*N. del t.*)

diez millones. Con seguridad en este caso hemos «obtenido algo» de las ecuaciones que no pusimos en ellas.

Lo mismo es cierto para las características cualitativas de los «espectros complejos», es decir, los espectros de los átomos más pesados. Quisiera recordar una conversación con Jordan, quien me dijo, cuando se derivaron las características cualitativas de los espectros, que un desacuerdo con las reglas derivadas de la teoría de la mecánica cuántica y las establecidas por la investigación empírica hubiera proporcionado la última oportunidad para realizar un cambio en el marco de la mecánica de matrices. En otras palabras, Jordan pensaba que quedaríamos, al menos temporalmente, faltos de ayuda si se hubiera producido un desacuerdo en la teoría del átomo de helio. Esta había sido, en esa época, desarrollada por Kellner y por Hilleraas. El formalismo matemático era demasiado costoso e irremplazable, de tal modo que si el milagro relativo al helio antes mencionado no hubiera ocurrido, se hubiera producido una verdadera crisis. Con seguridad, la física se hubiera sobrepuesto a dicha crisis de un modo u otro. Es cierto, por otra parte, que la física tal como actualmente la conocemos no hubiera sido posible sin una recurrencia constante de milagros semejantes al del átomo del helio, que es quizás el más asombroso milagro que ha tenido lugar en el curso del desarrollo de la mecánica cuántica elemental, pero con mucho no el único. De hecho, el número de milagros análogos está limitado, según nuestra opinión, solamente por nuestra voluntad de indagar otros semejantes. La mecánica cuántica tenía en su haber, sin embargo, muchos otros éxitos igualmente deslumbrantes que nos proporcionaba la convicción firme de que era lo que llamamos correcta.

El último ejemplo es el de la electrodinámica cuántica, o la teoría del desplazamiento de Lamb. Mientras que la teoría de la gravitación de Newton tiene todavía conexiones obvias con la experiencia, ésta entró en la formulación de la mecánica matricial solamente en la forma refinada o sublimada de las prescripciones de Heisenberg. La teoría cuántica del desplazamiento de Lamb, tal como fue concebido por Bethe y establecido por Schwinger, es una teoría puramente matemática y la única contribución directa del experimento fue mostrar la existencia de un efecto mensurable. El acuerdo con el cálculo es mejor que una parte en un millar.

Los tres ejemplos anteriores, que se podrían multiplicar casi indefinidamente, deberían ilustrar la idoneidad y la precisión de la formulación matemática de las leyes de la naturaleza en términos de conceptos elegidos para su manipulación, siendo las «leyes de la naturaleza» de una precisión casi fantástica pero de un alcance estrictamente limitado. Propongo referirnos a la observación que dichos ejemplos ilustran como la *ley empírica de la epistemología*. Junto con las leyes de la invariancia de las teorías físicas, es un fundamento indispensable de las mismas. Sin las leyes de la invariancia las teorías físicas podían haber quedado sin fundamento alguno; si la ley empírica de la epistemología no fuera correcta, nos faltaría el estímulo y la confianza que son necesidades emocionales sin las cuales las «leyes de la naturaleza» no podrían haber sido exploradas con éxito. El Dr. R. G. Sachs, con el cual he discutido la ley empírica de la epistemología, la calificó de artículo de fe del físico teórico, y se trata seguramente de eso. Sin embargo, lo que él llamó nuestro artículo de fe puede apoyarse bien por los muchos ejemplos reales además de los tres antes mencionados.

La unicidad de las teorías de la física

La naturaleza empírica de las observaciones precedentes me parece evidente por sí misma. Está claro que no es una «necesidad del pensamiento», y que no debería ser necesario, con el fin de demostrarlo, indicar el hecho de que se aplican solamente a una parte muy pequeña de nuestro conocimiento del mundo inanimado. Es absurdo creer que la existencia de expresiones matemáticamente simples para la segunda derivada de la posición es evidente por sí misma, cuando no existen expresiones semejantes para la propia posición o para la velocidad. Es por lo tanto sorprendente la prontitud con la que fue dado por hecho el maravilloso regalo contenido en la ley empírica de la epistemología. La capacidad de la mente humana para construir una serie de 1000 conclusiones y permanecer en lo «correcto», antes mencionada, es otro regalo similar.

Cada ley empírica tiene la cualidad inquietante de que uno no conoce sus limitaciones. Hemos visto que hay regularidades en los sucesos del mundo que nos rodea que pueden formularse en términos de conceptos matemáticos con una precisión prodigiosa. Hay, por otra parte, aspectos del mundo en relación con los cuales no creemos en la existencia de ninguna regularidad precisa. Les damos el nombre de condiciones iniciales. La cuestión que se presenta es si las diversas regularidades, esto es, las diversas leyes de la naturaleza que serán descubiertas, se fusionarán en una única unidad consistente, o al menos se aproximarán de modo asintótico a una fusión de ese tipo. Alternativamente, es posible que haya siempre leyes de la naturaleza que no tengan nada en común con otras. En la actualidad esto es así, por ejemplo, con las leyes de la herencia y de la física. Es incluso posible que algunas de las leyes de la naturaleza resulten en conflicto entre sí en cuanto a sus implicaciones, pero que cada una convenza lo bastante en su propio dominio de forma que no se esté dispuesto a abandonarlas. Debemos resignarnos a tal estado de cosas, o bien podría desvanecerse nuestro interés por aclarar el conflicto entre las diversas teorías. Podríamos perder el interés en «la verdad definitiva», esto es, en una representación que sea una fusión consistente en una única unidad de pequeñas representaciones, formadas sobre los diversos aspectos de la naturaleza.

Puede resultar conveniente ilustrar las alternativas mediante un ejemplo. Ahora tenemos en la física dos teorías de gran potencia e interés: la teoría de los fenómenos cuánticos y la teoría de la relatividad. Estas dos teorías tienen sus raíces en grupos de fenómenos que se excluyen mutuamente. La teoría de la relatividad se aplica a los cuerpos macroscópicos, tales como las estrellas. El suceso de la coincidencia, esto es, en último análisis la colisión, es el suceso primario de la teoría de la relatividad y define un punto en el espacio-tiempo, o al menos definiría un punto si las partículas que colisionan fueran infinitamente pequeñas. La teoría cuántica tiene sus raíces en el mundo microscópico y, desde este punto de vista, el suceso de la coincidencia, o de la colisión, incluso si se produce entre partículas sin extensión espacial, no es primario y no está en absoluto aislado en el espacio-tiempo. Las dos teorías operan con distintos conceptos matemáticos: el espacio de cuatro dimensiones de Riemann y el espacio de infinitas dimensiones de Hilbert, respectivamente. Hasta el momento, las dos teorías no han podido unificarse, es decir, que no existe una formulación matemática para la cual las ambas teorías resulten como aproximaciones. Todos los físicos creen que una unión de las dos teorías es inherentemente posible, y que la hallaremos. No obstante, es posible imaginar también que no se pueda hallar una unión de las dos teorías. Este ejemplo ilustra las dos posibilidades, de unión y de conflicto, mencionadas antes, ambas concebibles.

Con el fin de obtener una indicación de cuál es la alternativa que cabe esperar en definitiva, podemos pretender ser un poco más ignorantes de lo que somos y colocarnos en un nivel más bajo de conocimiento del que actualmente poseemos. Si podemos hallar una fusión de nuestras teorías en este nivel menor de inteligencia, podemos esperar confiadamente que hallaremos una fusión de nuestras teorías en nuestro nivel real de inteligencia. Por otra parte, si llegáramos a teorías mutuamente contradictorias a un cierto nivel de conocimiento, la posibilidad de la permanencia de teorías conflictivas no puede tampoco excluirse. El nivel de conocimiento y de ingenio es una variable continua y es improbable que una variación relativamente pequeña de esta variable continua cambie la representación alcanzable del mundo de inconsistente a consistente. [10 Este extracto fue escrito después de mucha vacilación. Estoy convencido de que es útil, en los debates epistemológicos, abandonar la idealización de que el nivel de la inteligencia humana tiene una posición singular en una escala absoluta. En algunos casos puede resultar incluso útil considerar el logro posible en el nivel de inteligencia de otras especies. Sin embargo, también me doy cuenta de que mis pensamientos a lo largo de las líneas indicadas en el texto son demasiado breves y no están sujetos a la suficiente evaluación crítica como para resultar confiables] Considerado desde este punto de vista, el hecho de que algunas de las teorías que sabemos que son falsas proporcionan resultados tan asombrosamente precisos es un factor adverso. Si tuviéramos menos conocimiento, el grupo de fenómenos que tales teorías «falsas» explican nos parecería lo bastante extenso como para «demostrar» dichas teorías. No obstante, consideramos «falsas» dichas teorías por la razón de que, en último análisis, son incompatibles con otras representaciones más globales y, si se descubre la cantidad suficiente de tales falsas teorías, estarían obligadas a entrar en conflicto entre ellas. De modo semejante, es posible que las teorías que consideramos que están «verificadas» por un número de coincidencias numéricas que nos parece ser lo bastante grande, son falsas porque están en conflicto con una teoría más global que está más allá de nuestras posibilidades de descubrimiento. Si esto fuera cierto, deberíamos esperar conflictos entre nuestras teorías tan pronto como su número crezca más allá de un cierto punto y tan pronto como cubran un número grande de grupos de fenómenos. En contraste con el artículo de fe del físico teórico antes mencionado, esta es la pesadilla del teórico.

Consideremos unos cuantos ejemplos de teorías «falsas» que proporcionan, en vista de su falsedad, descripciones alarmantemente precisas de grupos de fenómenos. Con alguna buena voluntad, podemos descartar parte de la evidencia que esos ejemplos deparan. El éxito de las ideas pioneras de Bohr sobre el átomo fue siempre bastante ajustado, y lo mismo se aplica a los epiciclos de Tolomeo. Nuestro ventajoso punto de vista actual nos da una descripción precisa de todos los fenómenos que dichas teorías primitivas podían describir. Lo mismo no es cierto para la así llamada teoría del electrón-libre, que proporciona una descripción maravillosamente precisa de muchas, si no de la mayoría, de las propiedades de los metales, semiconductores y aislantes. En particular, explica el hecho, nunca comprendido de modo apropiado sobre la base de la «teoría actual», de que los aislantes muestran una resistencia específica a la electricidad que puede ser 1026 veces mayor que la de los metales. De hecho, no existe evidencia experimental que demuestre que la resistencia no es infinita bajo las condiciones en las que la teoría del electrón-libre nos lleva a esperar una resistencia infinita. Sin embargo, estamos convencidos de que la teoría del electrón-libre es una burda aproximación que debería reemplazarse, en la descripción de todos los fenómenos relativos a los sólidos, por una descripción más exacta.

Desde nuestro ventajoso punto de vista actual, la situación presentada por la teoría del electrón-libre es irritante porque no parece presagiar ninguna de las inconsistencias que no podamos superar. La teoría del electrón-libre despierta dudas acerca de hasta qué punto deberíamos creer en las coincidencias numéricas entre la teoría y el experimento como evidencia de la corrección de una teoría. Estamos acostumbrados a tales dudas.

Una situación mucho más difícil y confusa se presentaría si pudiéramos, algún día, establecer una teoría de los fenómenos de la conciencia, o de la biología, que fuera tan coherente y convincente como nuestras actuales teorías del mundo inanimado. Las leyes de la herencia de Mendel y el trabajo siguiente sobre los genes podrían formar muy bien el comienzo de una teoría de ese tipo en cuanto concierne a la biología. Es más, es completamente posible que se pueda hallar un razonamiento abstracto que muestre que hay conflicto entre esa teoría y los principios aceptados por la física. El razonamiento podría ser de naturaleza tan abstracta que no resultara posible resolver el conflicto, a favor de una o de la otra teoría, mediante un experimento. Tal situación pondría bajo una gran tensión nuestra fe en nuestras teorías y en nuestra creencia en la realidad de los conceptos que formamos. Nos daría un profundo sentido de frustración en nuestra búsqueda de lo que llamo «la verdad definitiva». La razón de que una situación tal sea concebible es que, fundamentalmente, no conocemos por qué nuestras teorías funcionan tan bien. Por consiguiente, su precisión no puede demostrar su certeza y consistencia. Efectivamente, creo que algo bastante comparable a la situación antes descrita existe si se confrontan las leyes presentes de la herencia y de la física.

Permítaseme terminar con una nota alegre. El milagro de la idoneidad del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni comprendemos ni merecemos[2]. Deberíamos estar agradecidos por ello y esperar que siga siendo válido en la investigación futura y que se extienda, para bien o para mal, para nuestro placer o incluso para nuestra confusión, a ramas más amplias del saber.

Eugene Wigner *(traducción: P. Crespo, 8 nov 2004)*

[2] No deja de ser extraña esta referencia por parte de Wigner al merecimiento, ya que se trata de un juicio que escapa de los límites racionales del resto de sus consideraciones *(N. del T.)*

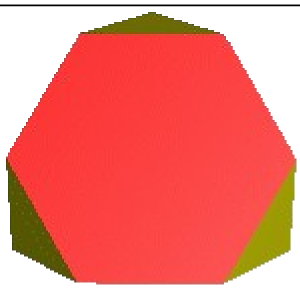
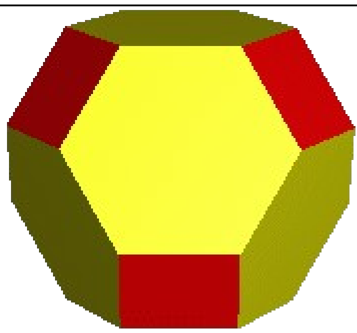
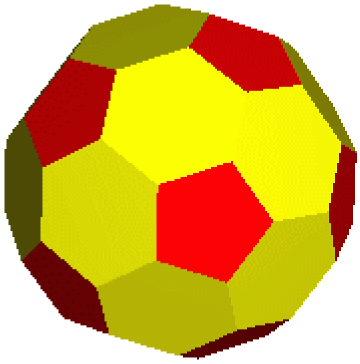
Breve paseo por el mundo de los sólidos arquimedianos

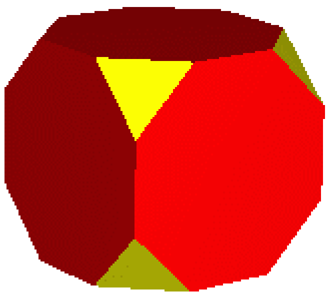
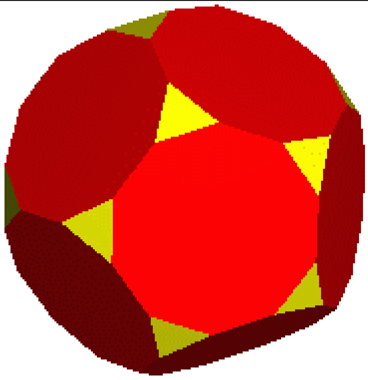
Tras los cinco poliedros regulares o platónicos surge otra colección de cuerpos de gran belleza y regularidad, los llamados sólidos arquimedianos, por ser Arquímedes el primero que los nombra, aunque algunos eran conocidos desde mucho antes. Se define un poliedro arquimediano o semirregular el que tiene como caras polígonos regulares de dos o más clases, iguales entre sí por clases, y dispuestos de la misma manera en cada vértice.

Los poliedros arquimedianos pueden ser obtenidos mediante manipulaciones de los platónicos, sean apuntamientos o biselados, reiterados varias veces. Empecemos por los más sencillos.

Obtenidos por apuntamientos:

Se apuntan los vértices de los sólidos platónicos en cuantía suficiente para que las caras de éste se conviertan en polígonos regulares de un número de lados doble. Los vértices, según su orden, quedan sustituidos por triángulos, cuadrados o pentágonos.

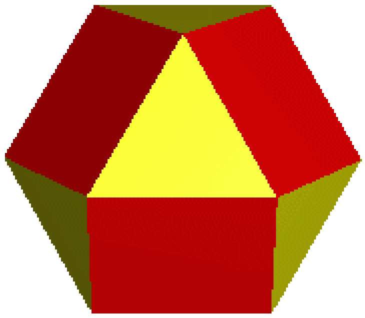
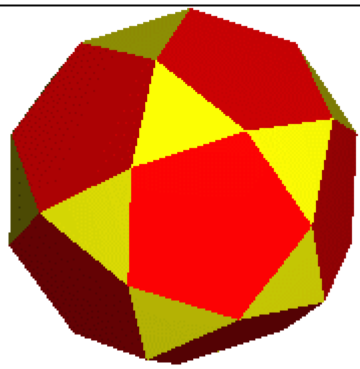
		
Tetraedro truncado. Es el más simple de todos, con 4 caras hexagonales y 4 triangulares.	Octaedro truncado, con 14 caras, llamado por ello también tetracaidecaedro. Es el único que puede pavimentar el espacio mediante copias de sí mismo.	Icosaedro truncado. Consta de 12 pentágonos y 20 hexágonos. Su forma se ha hecho familiar por los balones de fútbol.

	
Cubo truncado. Familiar en decoración (pisapapeles, lámparas) al ser una versión del cubo sin vértices agudos.	Dodecaedro truncado. De utilidades análogas a las del cubo truncado.

Poliedros semirregulares por excelencia.

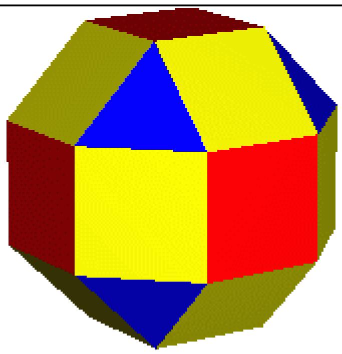
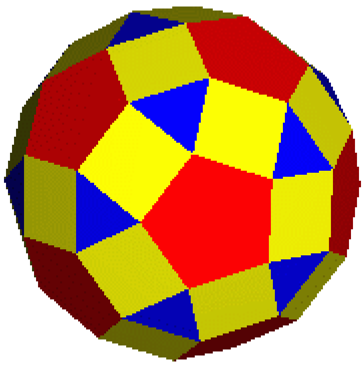
Estos apuntamientos pueden hacerse más intensos, de forma que lleguen a juntarse unos con otros, definiendo un nuevo poliedro. Así el cubo y el octaedro, poliedros conjugados, convergen a un solo sólido, el cuboctaedro, y análogamente ocurre con el dodecaedro y el icosaedro.

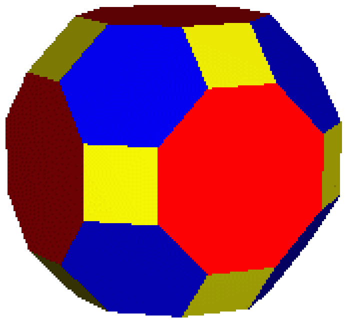
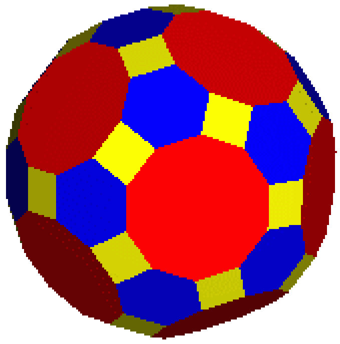
Estos dos poliedros reciben el nombre de "semirregulares por excelencia", al estar cada cara de una clase completamente rodeada por caras de la otra. Son los únicos arquimedianos en que se cumple esta propiedad.

	
Cuboctaedro. Familiar también en objetos de uso diario, como pisapapeles.	Icosidodecaedro.

El grupo rómbico.

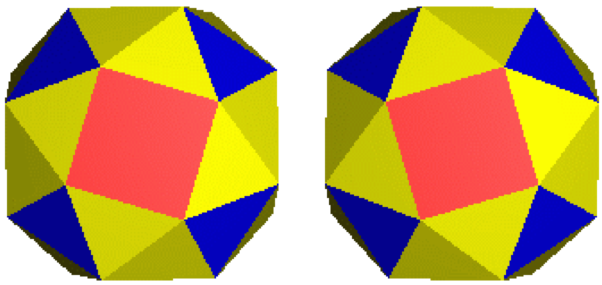
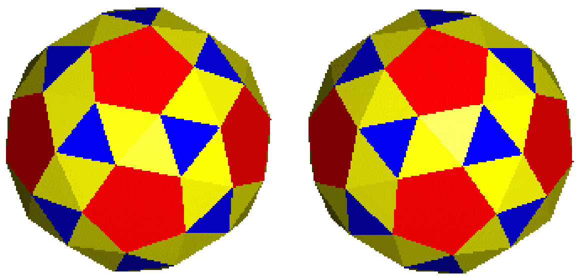
Puede utilizarse otro tipo de manipulación con los poliedros regulares. Si trasladamos las caras del hexaedro paralelamente a sí mismas hacia el exterior definimos el rombicuboctaedro. Análogamente ocurre con otros poliedros. Todos ellos reciben el prefijo *rombi-* al tener planos en común con el cubo, el octaedro y el dodecaedro rómbicos o el icosaedro, el dodecaedro y el triacontaedro rómbicos, poliedros no arquimedianos pero de interesantes propiedades.

	
Rombicuboctaedro. Si giramos el "piso" superior 90º obtenemos una figura muy parecida, que no es arquimediana al no cumplirse la condición de que todos los vértices deben ser del mismo tipo.	Rombicosidodecaedro. Resultado del mismo procedimiento anterior aplicado al dodecaedro o al icosaedro.

	
Gran Rombicuboctaedro. El mismo procedimiento aplicado a las caras octogonales del cubo truncado a las hexagonales del octaedro truncado.	Gran rombicosidodecaedro. Obtenido desde las caras decagonales del dodecaedro truncado o las hexagonales del icosaedro truncado.

Los romos

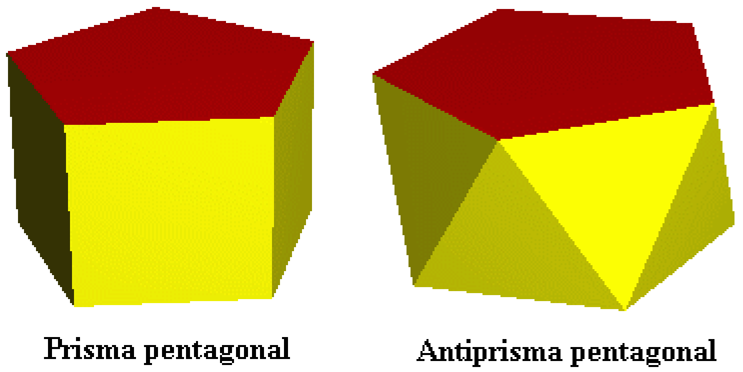
Sorprendentemente, otros dos poliedros arquimedianos tienen versiones quirales, es decir, se producen en las versiones especulares, dextrógira y levógira. Se obtienen mediante nuevas traslaciones y apuntamientos.

	
Cubo romo (versiones dextrógira y levógira)	Dodecaedro romo (versiones dextrógira y levógira).

Los prismas y prismatoides.

Si contamos los romos como un solo poliedro, el número de éstos se eleva a 13. ¿Hay más? ¡Sí, infinitos más! Un prisma puede ser diseñado de modo que sus caras laterales sean cuadrados. En un prismatoide o antiprisma, las caras laterales son triángulos, y las bases están giradas entre sí. Puede diseñarse un prismatoide de forma que sus caras laterales sean triángulos equiláteros.

Estos tipos de prismas y prismatoides cumplen con todas las condiciones de poliedro arquimediano. Veámoslo en este ejemplo referido al pentágono:

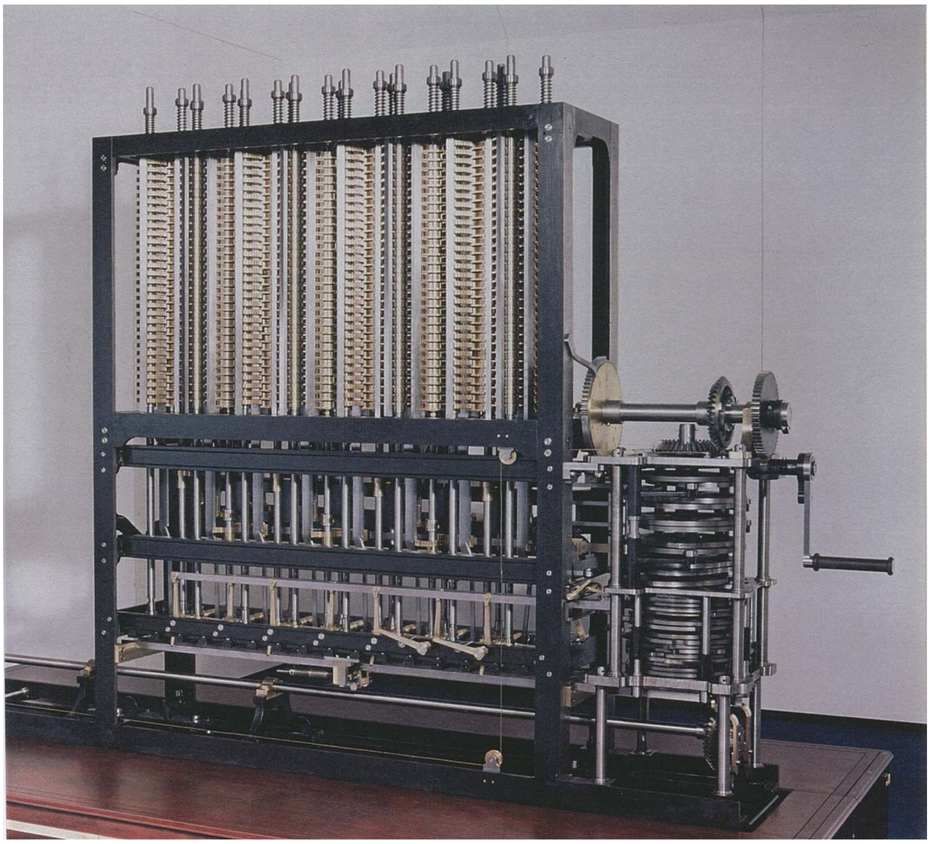


Ambos poliedros deberían ser considerados en rigor arquimedianos, aunque en la práctica se hace un grupo aparte con ellos.

El prismatoide es utilizado como cuerpo aproximativo de volúmenes más complicados, al ser fácil el cálculo de su volumen.

JMAiO, BCN, nov 05

(Figuras cortesía de http://www.mat.puc-io.br/~inicient/5_poliedros/poli_arquimedes.htm)



La máquina analítica de Charles Babbage

Ada Lovelace

La consultora en redes sociales británica Suw Charman-Anderson propuso declarar el 24 de marzo como el Día de Ada Lovelace, con la finalidad de difundir la figura de una pionera de la tecnología como modelo para el resto de las mujeres. Invitó a colegas de todo el mundo a proponer otros ejemplos de mujeres destacadas en un campo tan dominado por los hombres y recibió innumerables propuestas.

Ada Lovelace fue hija del poeta Lord Byron y es considerada la primera programadora de la historia. En 1843 Lovelace escribió una serie de instrucciones para que la "máquina analítica" (que estaba planeando Charles Babbage y que terminada hubiera sido la primera computadora del mundo), calculara automáticamente los números de Bernouilli, una serie que interviene en muchas áreas de la matemática en apariencia distanciadas entre sí. Ada fue también una de las primeras personas en apreciar la inmensa promesa que encerraban las máquinas capaces de ejecutar algoritmos programados de antemano.

Es muy reveladora su frase «La máquina analítica teje patrones algebraicos al igual que el telar de Jacquard teje flores y hojas».