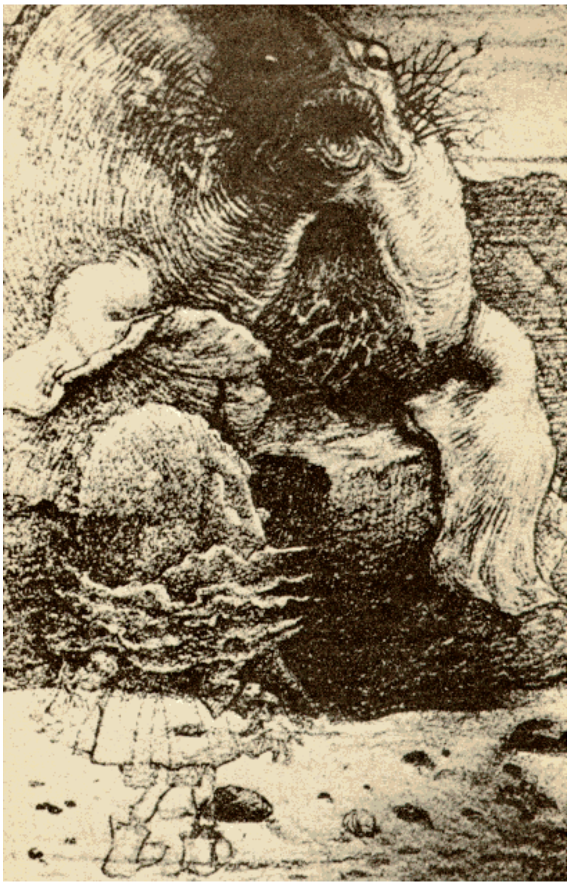
CARROLLIA

No.58, SEPTIEMBRE DE 1998



¡El terrible Boojum!

Advertencia: La revista CARROLLIA es el órgano de expresión del CARROLLSIG de Mensa España. Se distribuye desde 1984 como boletín trimestral. Lo que viene a continuación es sólo un extracto de su contenido por lo que pueden hacerse referencias a partes de la publicación no reproducibles en HTML y en consecuencia ausentes de esta página. Cualquier responsabilidad en este aspecto es sólo de prudentius y no de los editores Josep María Albaigès y Francesc Castanyer.

CONTENIDOS

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C]** , es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Los meses de junio y diciembre se entrega, incluida en la subscripción, la revista **BOFCI**, órgano de la **FCI** (Facultad de Ciencias Inútiles), coordinada, dirigida, editada y remitida por:

NUMEROLOGÍA CARROLLIANA: 58

Es la distancia media de Mercurio al Sol, en millones de km.
También es la máxima temperatura registrada en la Tierra (el Azizia, Libia, 58º C, en 1922).
Es el número cabalístico de Noé: NOH = 58
En loterías es el "limón".
El número de clases del cuerpo cuadrático complejo Q($\sqrt{-58}$) es igual a 2.

CORRESPONDENCIA

Miguel Á. Lerma., uno de nuestros más fecundos colaboradores, acaba de afrontar el duro trago de un traslado kilokilométrico, desde Texas hasta Illinois. Pero aun así halla ocasión de desafiarnos con uno de sus habituales problemas:

Acabo de encontrar otro problema que quizá sea de interés. Considera la sucesión de la forma 2^n para n=0,1,2,3,..., es decir: 1, 2, 4, 8 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, etc. Si miramos al primer dígito de la izquierda de los números que aparecen en esa sucesión veremos que el 7 aparece por primera vez para n=46 (2^{46} = 70368744177664), mientras que para entonces el 8 ya ha aparecido varias veces. ¿Significa eso que el 8 aparecerá a la larga con más frecuencia que el 7 como dígito de la izquierda de 2^n? La sorprendente respuesta es que no, de hecho a la larga el 7 aparece con una frecuencia algo superior a la del 8. El problema que propongo consiste en averiguar con qué frecuencia relativa aparece exactamente cada uno de los dígitos 1 a 9 a la izquierda del número 2^n.

Como pista diré que si t es un número irracional, entonces la sucesión t, 2 t, 3 t,..., n t,... está uniformemente distribuida módulo 1, es decir, las partes decimales de esos números caen en cada subintervalo de [0,1) con una frecuencia relativa proporcional a la longitud del subintervalo. También se sabe que el logaritmo decimal de 2 es irracional, y por tanto... ya no digo más.

Los resultados se pueden extender fácilmente a sucesiones cualesquiera de la forma a^n (siempre que log a sea irracional), y a bases distintas de la decimal. Por último estúdiese qué pasa con bloques de dígitos, por ejemplo, ¿con qué frecuencia relativa aparece el bloque 10298 a la izquierda del número 2^n? Dicho de otra manera, si entre los números 1, 2, 4, 8,..., 2^N, hay F(N) que empiezan por 10298..., ¿a qué valor tiende F(N)/N cuando N tiende a infinito?

Con tantas pistas me lo pusiste fácil. Según lo que dices, la parte decimal de n log 2 está uniformemente distribuida en el intervalo (0,1), y por tanto sus antilogaritmos (las potencias de 2) lo estarán de forma logarítmica, conque la primera cifra se repartirá en el intervalo (0,10) de la misma forma, en logaritmo decimal. Es decir:

Cifras que empiezan con

1: 30,10 % (log 2)

2: 17,61 % (log 3 - log 2)

3: 12,49 % (log 4 - log 3)

etc.

El problema está emparentado con el de la distribución aleatoria de la primera cifra de un número cualquiera, sea la producción anual de acero en USA o la magnitud bolométrica de una estrella. Desde antiguo se había observado que las páginas de las tablas de logaritmos están más usadas en los números bajos que en los altos.

La segunda parte sigue de inmediato. El bloque 10298 tendrá una frecuencia de aparición proporcional a log (10299/10298), o sea 0,00422 %.

Miguel Ángel, dando el resultado por bueno, añadió algunas precisiones:

Es verdad, aunque los detalles son algo más complejos. En una primera aproximación podríamos tomar un intervalo [1,N] y calcular la probabilidad de que un número elegido al azar (con probabilidad uniforme) en dicho intervalo empiece por determinada cifra. Luego computamos el límite de dicha probabilidad cuando N tiende a infinito. Desgraciadamente dicho límite no existe, aunque sí existen un «límite inferior» y un «límite superior» (diferentes). Por ejemplo, si miramos a los números que empiezan por 1, entre 1 y 9 hay 1, por tanto su proporción hasta ahí es 1/9 = 0,11111111..., pero entonces encontramos los números 10, 11,..., 19, que empiezan por 1, así que la proporción sube hasta 11/19 = 0,5789473684... para N=19, y a partir de ahí baja hasta 11/99 = 0,11111111... para N=99, luego sube hasta 111/199 = 0,5577889447... para N=199, y así sucesivamente. La proporción de números que empiezan por 1 va oscilando pues entre una serie de máximos y mínimos que convergen respectivamente a un límite superior (5/9 = 0,55555555... en este caso) y a un límite inferior (1/9 = 0,11111111...) diferentes.

En casos como éste a veces es preferible calcular el límite en sentido Césaro, es decir, en vez de lim a(N) calculamos lim (a(1) +... + a(N))/N. Esta técnica, por ejemplo, permite asignar «límite» a sucesiones oscilantes como 1, 0, 1, 0,... (que en sentido Césaro tiene límite 1/2). Sin embargo en el problema que nos ocupa el límite en sentido Césaro tampoco existe, aunque los límites superior e inferior obtenidos se hallan más próximos. El paso al límite en sentido Césaro se puede reiterar indefinidamente:

a(0,N) = a(N)

a(1,N) = (a(0,1) + ... + a(0,N))/N

a(2,N) = (a(1,1) + ... + a(1,N))/N

Y así sucesivamente. En este problema tras infinitas reiteraciones los límites inferior y superior acaban coincidiendo, con lo cual es posible hablar del «límite» de la probabilidad de que un número natural elegido «al azar» comience por una cifra dada c. Si no recuerdo mal dicha probabilidad es precisamente el logaritmo decimal de (c+1)/c.

Una pregunta que uno se podría hacer es, si 10298 puede considerarse como una «cifra» en base 100000, ¿por qué calculamos la frecuencia correspondiente con un logaritmo decimal en vez de un logaritmo en base 100000?

Otro habitual colaborador es Mariano Nieto Viejobueno, de Madrid, quien manda unos artículos con las siguientes palabras:

También adjunto unas notas que escribí sobre la "sectio aurea" tras mi reciente viaje a Sicilia. Es un tópico hablar de las proporciones áureas de los templos griegos. Martin Gardner es uno de los que mencionan el tema en su libro "Mathematical Puzzles & Diversions" pero, tras mis indagaciones, no estoy muy convencido de que los arquitectos de la Grecia clásica fueran conscientes del uso de tales proporciones.

En ese mismo libro, publicado en 1961, Gardner dedica el capítulo 17 al problema de **"squaring the square".** En la página 206 reproduce un cuadrado de orden **24,** añadiendo que **"this perfect**

square stiil holds the low-order record". Hace poco encontré un puzzle, hecho primorosamente en madera, llamado **"Plenus",** fabricado en Suiza por NAEF AG y que consiste en un cuadrado descompuesto en **21** cuadrados distintos. Me entretuve en medir los lados de cada uno con el resultado que verás en la tabla correspondiente. La unidad de medida es arbitraria; al cuadrado más pequeño no conviene darle un lado unidad porque entonces habría otros con lados no enteros.

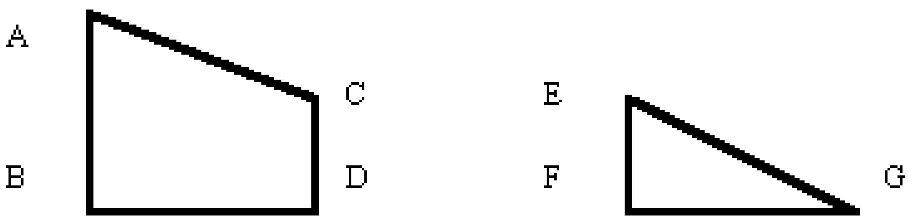
Adjunto también una fotocopia tomada de **"Proofs without Words"** de R.B. **Nelsen,** libro editado por "The Mathematical Association of America". Como verás se trata de una demostración visual de que **la suma de los n primeros cubos es igual al cuadrado de la suma de dichos n primeros números.** Tal vez interese publicarla en [C], su autor es un tal **Alan L. Fry.**

También yo he sido un ferviente admirador del número Φ , aunque sin caer en las ingenuidades (creo) de quienes pretenden ver en él un canon escrito en las estrellas. Pienso más bien que es al revés: el hecho de ser usado a menudo ha acostumbrado nuestra sensibilidad a él, y tendemos a encontrarlo estético precisamente porque lo vemos tanto. Para muestra, un botón: un rectángulo mucho más "feo" es el de proporciones √ 2, usado en la norma DIN por su cómoda propiedad de reproducirse en el doblado. Pero, a fuerza de hallarlo, mucha gente ya encuentra más "natural" esa proporción que Φ . Los diseñadores de libros tienden a darles proporciones más "chatas" todavía (entre 1,25 y 1,50). La pantalla de cine tiene la proporción 1,50, y la de TV 1,33 (por lo que siempre recorta algo los filmes televisados).

Las proporciones del Partenón son *aproximadamente* Φ , como tantas otras (la pirámide, etc.). De todos modos, es cierta la presencia del número áureo en la naturaleza, como en las espirales logarítmicas de algunos caracoles, y esto puede ser debido a su parentesco con la sucesión de Fibonacci, que sí tiene motivos "naturales " para aparecer. Los granos de una piña americana se distribuyen según los números de esta sucesión, y en una ocasión hallé demostrado en un artículo que ésta es la forma más eficaz de disponerlos en una doble espiral cruzada.

El libro *The Divine Proportion*, de H. E. Huntley, describe multitud de otras proporciones estéticas, como la de la cruz de Lorena, el cuboide de diagonal 2, etc.

Por mi cuenta he hallado otras aplicaciones de Φ . Por ejemplo, una de las métricas más bellas en poesía, la silva, está formada por versos de 11 y 7 sílabas, cuya proporción es bastante aproximadamente la áurea. Otra inesperada aplicación aparece en la Gran Vía Diagonal de Barcelona, que corta a los cuadrados de las manzanas de casas según un ángulo cuya tangente vale ½, formando dos tipos de figuras:



Si tomamos como unidad el lado de la manzana, AB = BD = FG, las longitudes de fachadas AC + CD ó FE + EG son el número áureo, Φ , lo que puede servir para establecer curiosas proporciones estéticas entre las casas correspondientes. No doy a este hecho más valor que el de una mera coincidencia.

Algunas curiosas igualdades que también he descubierto tanteando:

En la sucesión de término general $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 1}$, es lim $u_n = \Phi$

$\Phi - 1 = 1/\Phi$

$\Phi^2 = \Phi + 1$

$1/\Phi^2 = 2 - \Phi$

$1/\Phi^2 + \Phi^2 = 3$

$\Phi^n + (-\Phi)^{-n} = L_n$, siendo L_n la sucesión de Lucas, L = {1,3,4,7,11,18…}, similar a la de Fibonacci.

$F_n = [\Phi^n - (-\Phi)^{-n}]/\sqrt{5}$, siendo F la sucesión de Fibonacci.

$\Phi^n = F_{n-1} + F_{n\Phi}$

En cuanto al resto de tus comentarios: esa demostración intuitiva de la suma de los cubos era nueva para mí. Creo que no hace mucho que publiqué una similar en [C]. Y en cuanto al cuadrado de cuadrados, que creo que es el menor posible, recuerdo que en una ocasión me mandaste el membrete de la empresa estadounidense donde trabaja tu hermano, que era una versión reducida del mismo… con una ligera trampa, pues era un rectángulo, aunque de lados muy similares.

¡Carta de un nuevo miembro del CARROLLSIG! Roberto Herrera Pérez,. de Zaragoza, hace su autopresentación:

Acabo de asociarme a [C] como consecuencia del anuncio en OMNIA.

El presidente me ha dado la bienvenida en nombre vuestro. Me envió el [C-53] y sucumbí estoicamente.

Confieso que tengo la sensación de ser tonto. Visto que la más sofisticada matemática la usáis con la misma soltura que uno se toma un vaso de agua, me da vergüenza decir que dos y dos son cuatro. Por tanto, mi sistema de supervivencia me indica que no me ponga a solucionar problemas de esta materia. Lo único que puedo hacer es plantearlos.

Recibido el [C-57], observo que más del 50% de la producción es MADE IN JMAiO, cuestión que pretendo solucionar descontando mi porcentaje correspondiente. Para ello envío algún que otro artículo, presentando algún que otro problemilla y alguna que otra curiosidad, al objeto de entretener y contribuir un poco a descargar la laboriosa tarea del excelentísimo señor presidente. Sencillamente contribuyo a rellenar hojas.

Con varios mensistas con los que mantengo correspondencia particular estamos pensando en crear un SIG… un "algo" que nos permita ponernos a pensar para resolver problemas en la sociedad. La idea está todavía en pañales…

En cualquier caso, me honro de pertenecer a Carrollia. Gracias por vuestra bienvenida y recibid un cordial saludo.

Muchas gracias por tu carta y por tus elogios. Aunque efectivamente los socios auténticamente colaboradores en [C] no pasan de una docena, también una forma de contribuir es soportando el SIG. En todo caso, nunca lo importante fue la cantidad, sino la calidad, y escritos como el tuyo son los que animan para seguir trabajando.

Pero muchas gracias sobre todo por esa voluntad tuya de colaborar, aunque sea desde el lado filosófico (la filosofía no resuelve cuestiones, sino que las plantea). Por de pronto, esa idea tuya de formar un SIG dedicado al estudio de problemas entronca con las mismísimas raíces de Mensa, puesto que la idea inicial de Roland Berrill, nuestro fundador, fue brindar Mensa a la humanidad como un panel de expertos seleccionados por su alta clarividencia y preparación, en condiciones de ofrecer estudios y soluciones sobre los más acuciantes problemas del momento. En los primeros números de OMNIA se publicó una historia de Mensa que recogía estos tiempos difíciles, y pienso que no sería mala idea reeditarla. Es una idea que podrías proponer a su editora y que yo apoyaré.

De momento, pienso que el lugar adecuado para llevar a cabo tu proyecto sería la formación de un SIG propio. Si de momento no te atreves a emprender algo que sin duda da trabajo, te ofrezco las páginas de [C] para ello. Ahí tienes ESQ, que, en espera de su resurrección definitiva, nos honramos en tener como huésped.

Rafael León, de Málaga, mandó su comentario sobre [C-57]:

Andamos siempre de palabrerías. ¿Quién recuerda ya aquella advertencia mía sobre "manco" que ahora vuelvo a leer en relación con "penco", en "Carrollia"? ¿Te has dado cuenta de que "las diez palabras más bellas" suelen confundirse con los diez conceptos más bellos? ¿Qué belleza puede tener, como tal palabra, esa "libertad": Qué belleza tan poco preservada que la hace ser "libertaz" en el español de Castilla, "libertat" en el español de Cataluña, y "libertá" en el español de los andaluces?

En cuanto a "Atlántico", es igualmente correcta la delimitación "A-tlántico" y "At-lántico". La Real Academia reconoce que, en palabras de origen griego, el grupo *tl* entre vocales vacila en su organización silábica y se articula de diferente modo según zonas geográficas, capas sociales e incluso variación personal. Lo incorrecto, gráficamente, es escribir "A" al final de una línea (o ante un grabado, como ocurre en "Carrollia") y "tlántico" en el renglón siguiente (o detrás del grabado), porque un renglón no puede acabar con sólo la vocal que da comienzo a la palabra. "A-mérica" (ni el renglón siguiente podría comenzar con sólo la última vocal de otra apalabra: "Bidaso-a"

Tomo nota para [C] de lo que dices sobre A-tlántico o At-lántico (en México es claramente visible la pronunciación [*tl*] en palabras como *Tlapan*, *Tenochtitlán* (por cierto, que una vez leí un artículo muy "documentado" que sostenía que era *Tenochtítlan*, ¿sabes algo de esto?). En mi redacción, el azar partió la sílaba tras la A, cosa que sé que no se debe hacer, pero que curiosamente muchos tratamientos de texto ignoran. A veces me han salido particiones como *Marí-a*, *o-caso*, etc.

Nueva carta de Ricardo Isaguirre, quien desde sus heladas soledades australes de Río Gallegos (Argentina), vívidamente reflejadas en su postal, dice:

Estimado amigo Josep Maria:

Por cierto, estas inmensidades "down-under" dan escalofrío, El Río Gallegos del que toma nombre esta ciudad desemboca en una ría baja; más allá de su fría desembocadura se vislumbra desde la costanera el interminable Atlántico Sur ... y el alma se estremece al contemplarlo. La diócesis es en absoluto la más austral del mundo, dado que su territorio abarca también las misteriosas Islas del Atlántico Sur, donde sólo hay algún personal naval transitorio, viento y hielo.

Tal vez por espíritu de simetría, a mí me han atraído, desde que puedo recordar, los otros extremos, los boreales, que, es verdad, en algunos sentidos están más domesticados, pero que no pierden su encanto, incluido el Finisterre gallego.

Es emocionante sentir la presencia de gentes tan alejadas de nuestro propio finisterre europeo, que no otra cosa somos en España. Un reciente e-mail demuestra que hay más gente inquieta en esas zonas. Dice Luyis Mancilla Pérez:

Desde Chiloe, Chile, en los confines del mundo los saludo y felicito por la calidad intelectual de su página, llena de humor, inteligencia, imaginación.

Muchas gracias, Luyis, y esperamos ver algún día alguna aportación tuya. Y hablando de colaboraciones, la de Antonio Cebrián, de Sagunto, no falla nunca. Su breve carta de acompañamiento dice:

Estimado Josep Maria: Con la presente te remito material para que lo publiques en el próximo [C-58]:

1. El cincuenta y ocho.
2. 2. Tablero incaico = Fibonacci.
3. Cómo obtener números de Kaprekar.

¡Es curioso cómo Fibonacci y su habitual acompañante, el número áureo, con sus inesperadas aplicaciones, aparecen tan a menudo! De momento, sólo en este [C], ya van dos veces. Gracias, Antonio, y ahí verás tus colaboraciones, siempre dentro de la menguadas posibilidades que nuestro limitado espacio permite.

Un nuevo miembro de Mensa y del CARROLLSIG es Alfredo Quesada Menéndez, de Grado (Asturias), a quien damos nuestra cordial bienvenida. Alfredo llega con ganas de "dar guerra", pues dice en su primera carta:

En [C-56], en el artículo de Màrius Serra y los problemas de LC, en la segunda cuestión (los dos relojes), para preferir el primer reloj, la pregunta realizada de forma más correcta debería ser: ¿qué reloj es más exacto?, puesto que si debiéramos elegir, es claro que la elección estaría en el que ofrece retraso (máxime si se tiene la opción de poner en hora regularmente).

[La revista] ha sido una grata y refrescante lectura. Desde que *Cacumen* dejó de editarse, no conocía ninguna que tratase estos temas, y, la verdad, la echaba de menos.

Un viejo chiste (¿?) amplía el publicado en el BOFCI sobre Piquiponología:

Un señor va al médico y le comenta:

—Después de diez años de vida *marítima*, mi mujer y yo no tenemos *condescendencia*. Para mí que o ella es *esméril* o yo soy *omnipotente*.

Alfredo manda además unos divertidos artículos matemático-lúdicos, que hallaréis publicados en este número. ¡Muchas gracias, Alfredo! ¡A esto se le llama desembarcar fuerte! Adelante, seguimos esperando nuevas colaboraciones tuyas.

Pero no se queda atrás en el interés de sus colaboraciones Antoni Pérez y Poch, quien manda un problema de exposición fácil, resolución complicada y resultado final elegante y conciso. Aparecerá publicado en su lugar. Antoni manda también un artículo sobre Fermat y su teorema, que aun resuelto, no pierde actualidad.

Otro corresponsal del que hacía tiempo que no teníamos noticia nos cautiva con un divertidísimo artículo sobre la devoción de Santa Rosita de Lima. Dice José Antonio de Echagüe, de El Escorial (Madrid), antiguo colaborador de la tantas veces citada revista CACUMEN:

Te adjunto como curiosidad el borrador de lo que iba a ser el último artículo enviado a CACUMEN, y que por su cierre no llegó a publicarse. Lo escribí estando en Argentina, y por pura casualidad hace unos días lo encontré junto con papeles de hace diez o más años.

El tema que se propone en el artículo es apasionante, y sólo por falta material de tiempo no he abordado el estudio computerizado que propone José Antonio. ¿Algún lector de [C] se anima a ello? Aporto sólo mis apresuradas reflexiones: la "eficacia" de las nuevas cartas va decreciendo con el tiempo por la limitación del "mercado" disponible, lo que llega a anular la progresión geométrica de la "cadena". Observo que el valor al que has llegado es muy parecido a $e^{-2} = 0{,}1353\ldots$ ¿Andará por ahí el resultado? A lo mejor, para n=3 se llegaría a $e^{-3} = 0{,}0498\ldots$ Posiblemente responda a alguna ecuación diferencial del tipo $dy = \lambda\, ydt(a-y)/a$.

El problema me recuerda uno que publiqué en [C] hace años: si una bomba arrojada desde un avión "revienta" una manzana de casas al azar entre las n de una población, ¿cuántas bombas deben ser arrojadas para tener una probabilidad dada de destruir una parte dada de la ciudad? La primera bomba destruye una manzana, pero la segunda a lo mejor ya no, pues quizás caiga sobra la ya destruida. Y así sucesivamente, la "eficacia" de cada bomba se va reduciendo. ¿Cuál sería el número óptimo de bombas a echar para no despilfarrar explosivo inútilmente? Por supuesto, hay que contar con unos postulados "económicos": coste del bombardeo, de lo destruido, etc.

Y sigamos. ¿Podían faltar en este número las agudas, mordaces pero a la vez cariñosas cartas de Kira Jaén, de Córdoba? Me veo obligado a resumir sus puntos críticos:

…nuestro servicio de correos ha tardado 24 veces más que si me hubieras traído tú la carta personalmente… hay que dudar de ciertos valores del CI, pues nos la pegan miserablemente [¡Pues no digamos la Giga y otras similares!]… una sociedad pulula por Intenet haciéndose llamar Densa y solicita un CI de 50 [Esa sociedad debió de salir del apartado irónicamente así bautizado en Mensa dedicado a los estultos]… a ver si puedo montar una RAMERA (Reunión Anual de Mensa España, Récord de Asistencia)… ¿sabes algo de Conx Vega? [¡eso, eso, habla, Conxi, desde tu milenaria *Dertosa*!]… te mando unos artículos:

- *The Statistical Technique for Combining IQ Scores*, relativo a tu artículo de *El camelo de los CIs altísimos.*
- *Exploring the World of Magic Squares*
- *Geometría de los templos de Japón*, de *Investigación y Ciencia,* en Junio.

Gracias, gracias mil, querida K. Publicaré lo que pueda, que en mi deseo sería todo. En particular, esos problemillas de geometría métrica japoneses son deliciosos, y nuestro lectores no van a quedarse sin alguno de ellos. A estas alturas ya se ha decidido que la RAM de este año será en las Afortunadas, pero queda tu propuesta para el 99, tras la contemplación del eclipse.

Otra carta jugosa: la de Ricardo Sanz Tur, de Madrid. Ricardo disecciona sin piedad los aspectos gramaticales expuestos en un [C] anterior (figurarán en artículo aparte) al tiempo que dice:

Te envío un par de recortes de periódico, tomados del ABC. Trata sobre Carroll y la ¿pederastia? El otro hace referencia a un diccionario de apodos. Como también eres un onomástica, puede resultarte interesante como curiosidad.

Por otra parte, he de decirte que —perdona por no consultarte— puse en circulación tu "examen de la ESO". Curiosamente, coincidió en tiempo con otro "examen de la ESO" que rondaba por los institutos madrileños, Las carcajadas eran a mandíbula batiente. Todo el profesorado se lo fotocopió. Según mis últimos informes, ya anda por Córdoba. Con el tiempo, formará parte de nuestro folklore popular, como el problema de las patatas o el de los funcionarios remeros, que tienen autor y acaban siendo de dominio público. Felicidades por el gran éxito cosechado. En mi centro tuvo especial éxito habida cuenta de que fuimos uno de los tres institutos pilotos que anticipamos la LOGSE hace ya más de seis años.

Tomo tu testigo y aporto mis opiniones en relación con la carta de Miguel Ángel Lerma, profesor que fue del centro en el que estoy destinado, Curiosa coincidencia, ¿no crees? A pesar de los años que lleva en Estados Unidos, todavía se le recuerda en el "Carlos III". Por cierto, Miguel Ángel, si lees esto, Concha García te envía recuerdos.

Supongo que a estas alturas, los libros a los que se refería Lerma estarán más que traducidos. Da igual. Esto no es más que lingüística recreativa.

Refiriéndonos al asunto de los millones y los billones (un millón de millones), tal vez Miguel Ángel desconozca que recientemente la RAE ha aprobado la palabra "millardo" (eufónica más no poder, como fácilmente puede apreciarse) para referirse exactamente a eso: mil millones. Así que tenemos millón (1.000.000), millardo (1.000.000.000) y billón (1.000.000.000.000). Pese a como suena la palabreja, hemos de reconocer que es práctica, sobre todo debido a la inflación. Aunque ahora, con la entrada en el EURO, puede que no nos haga falta, por lo menos durante algún tiempo. Por cierto que observo horrorizado la merma sangrante que se produce en mi cuenta corriente desde que los cajeros automáticos expresan las cantidades en las dos monedas, Esto de dividir entre 167 es bastante deprimente.

Gracias por los artículos. No vale la pena volver sobre las pellas de barro sobre LC: en todo 1998 no nos libraremos de ellas. Creo que ha sido útil aceptar el término *millardo*, que de todos modos era ya de uso general en la prensa. Resulta cómodo, especialmente a medida que la inflación avanza. Además, con algo había que sustituir el *billion* americano.

Celebro que gustara el "examen de ESO". Desde luego, mi intención al publicarlo era que se difundiera todo lo posible. Bajo este humor late un gravísimo problema: supongo que la siguiente generación deberá partir desde cero en la educación de sus hijos, porque no habrá profesores para impartirla. Esto me recuerda una vieja aventura de Flash Gordon, en que los habitantes de un planeta se dedicaban al ocio (*otium*, entendido en sentido positivo de autocultivo, en oposición al *nec-otium* o negocio), pues las máquinas que generaciones anteriores habían diseñado lo hacían todo… tanto, que sus beneficiarios habían ido olvidando cómo se manejaban. El resto ya se puede suponer: las máquinas acababan rebelándose, como un Espartaco cualquiera.

Estoy de acuerdo en que "puse cero coma nueve litros de gasolina" es un invento de los matemáticos, pero creo que la lengua (como el derecho y tantas otras cosas) están al servicio de la sociedad, por lo que la obligación de la Academia es aceptar lo que es realidad flagrante. ¿Cómo expresaré el hecho fáctico de que una parcela puede medir 0,357694 hectáreas, si esta precisión me viene exigida, por ejemplo, para calcular su valor?

En cuanto a Pta, no es una abreviatura, sino un símbolo (como ♂ lo es de varón, o Cu lo es de cobre). Por eso no lleva punto, ni, desde luego, plural, igual que cuando hablamos de 300 m (sin punto). La abreviatura "Pts." (que debería llevar punto) lo lógico es que desaparezca, como "ms." por metros.

Al 2 de septiembre, ya en curso de confección de esta sección de correspondencia, toma el tren por el estribo la carta de Jorge Viaña, de Las Plata (Argentina):

La x en la ecuación de Pell [se refiere a la colaboración de ESQ], para ponerla en quichua, llevaría toda una línea, por eso opto por el nombre quichua de la *y*. Con respecto a la pronunciación de ciertas vocales, es de advertir que en ammará, la *e* no sólo existe, sino que los indios tienen tendencia a pronunciar la *i* como *e*, empezando por su nombre (dicen *endeo* para significar *indio*). Son lenguas muy parecidas. El gorro ese, generalmente multicolor, con orejeras, se lama "*lluchu*" en uno y "*chullu*" en otro. Es muy característico, algo parecido al gorro frigio.

¿Qué idioma puede ser ése en que el sonido */ks/* exija una línea? Me has dejado intrigado. La abertura *i* > *e* es corriente en muchas lenguas, y también la inversa. En un viaje a Grecia de este verano pude observar que su actual idioma tiene nada menos que cinco formas distintas de escribir la i. Aparte las clásicas I (iota), Y (ípsilon, que antiguamente se pronunciaba como la u francesa), también han convergido a ese sonido la H (eta) y los diptongos EI y OI. Claro que también en castellano hay tres formas distintas de representar el sonido */k/*: C, K, QU, y en el Hispanoamérica otras tres para */s/*: S, Z, C. ¿Por qué las reformas de la Academia son tan lentas?

Y así, entre bromas y veras, mis queridos carrollistas, hemos llegado a otro septiembre. ¡Un nuevo curso empieza! Y una nueva subscripción de [C]. Hasta las Navidades.

JMAiO

PROBLEMA DE MIGUEL A. LERMA

He observado que en algunos servicios públicos hay dos rollos de papel, uno de los cuales sirve como "repuesto" para cuando se acaba el otro. Lamentablemente muchos usuarios no distinguen entre el rollo principal y el de repuesto, así que usan los dos eligiendo cualquiera de ellos al azar (mientras tenga papel, claro). Supongamos que en un servicio público se colocan dos rollos nuevos, cada uno de los cuales contiene papel para usar 200 veces (suponemos que cada vez se usa siempre la misma cantidad de papel). Diariamente 10 personas usan el servicio, una vez cada una (así en cada rollo hay papel para 20 días). ¿Cuál es la probabilidad de que los rollos se gasten el mismo día? Resolver el mismo problema con R rollos de papel cada uno de los cuales sirve para V veces, y con N personas usando el servicio diariamente. Estudiar el comportamiento asintótico de la solución para N y V tendiendo a infinito con D = V/N = constante.

Miguel A. Lerma

NOTAS CURIOSAS SOBRE APELLIDOS

Un tema frecuente de curiosidad son las combinaciones chocantes que el azar depara entre los dos apellidos de una persona. Pero a veces estos emparejamientos pueden proceder de otras fuentes. En una relación de unos tres millones de apellidos españoles confeccionada por el CÍRCULO DE LECTORES figuran como consecutivos entre los 3000 primeros clasificados:

Carreras (524) Perales (5125), ambos cantantes populares
Garzón (528) Alegre (529)
Planas (755) Mota (756)
Monge (833) Sacristán (834)
Conejo (880) Amado (881)
Lorca (887) Machado (888), ambos poetas

Matías (1012) Matilla (1013)
Florido (1117) Mancebo (1118)
Lasa (1191) Laso (1192)
Clavero (1218) Clavijo (1219)
Escalona (1350) Escolano (1351), acrónimos y muy similares
Bel (1602) Doncel (1603)
Coloma (1639) Corona (1640)
Cara (1659) Carazo (1660)
Del Prado (1688) Del Toro (1689)
Riesco (1707) Riesgo (1708)
Capitán (2156) Coronel (2157)
Forte (2557) Morro (2558)
Grueso (2678) Madero (2680)
Cortázar (2715) Cortizo (2716)
Puchades (2747) Pujadas (2748)
Cal (2810) Cala (2811)
De la Flor (2858) De la Morena (2859) De la Riva (2860)
Peco (2933) Penedo (2934)
Petit (2935) Portal (2936)
Dapena (2971) Descalzo (2972)

Josep M. Albaigès
Barcelona, junio 1998

RECUERDOS BIKINEROS DEL ABUELO CEBOLLETA

Algunos amigos me han comentado verbalmente que quizás exagerase en lo de que algunos calificaran de "expansión pornográfica" la exhibición de unas fotografías de chicas en bikini en los años 60. ¡Ay, amigos! ¡Qué suerte tenéis de haber nacido más tarde! Veamos si con lo que sigue os convenzo de la lozanía de mis recuerdos.

Se dice que el bikini apareció hace ahora medio siglo justo, cuando los estadounidenses arrojaron la primera bomba de hidrógeno sobre el atolón de este nombre. Como se habló mucho del Atolón del Bikini, el avispado lanzador de cierto traje de baño de dos piezas le llamó igual que la isla oceánica, nombre que hizo fortuna.

Pero, en honor a la historia, hay que aclarar que el traje de baño de dos piezas no era tan nuevo. En las hemerotecas hallé el anuncio de 1932 que ofrezco junto a estas líneas como pintoresca prueba.

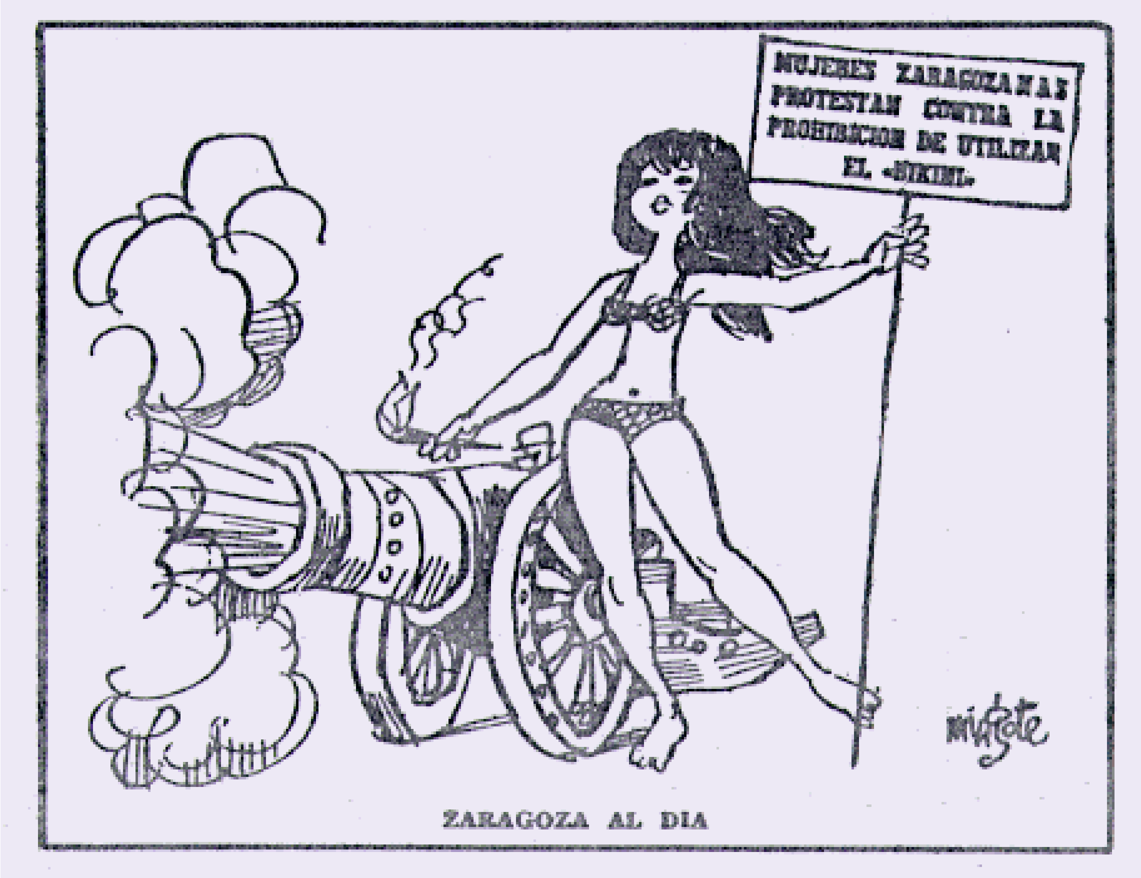
El caso es que el "nuevo" bañador se impuso enseguida a finales de los años 40. Las mujeres lo preferían por la mayor comodidad en el secado y en el bronceado, y los hombres por razones obvias. En los años 50 se difundió por toda Europa, pero los españoles, sometidos a la represión clerical-autoritaria-conservadora, teníamos que limitarnos a ojear las revistas en las que el Tour de Francia pasaba por la playas, mirando el público más que los ciclistas. La Guardia Civil se cuidaba de prohibirlo a las bañistas demasiado audaces.

Con todo, en las zonas turísticas había más manga ancha, por aquello de la divisa. El primer bikini que vieron estos ojos míos que se ha de comer la tierra fue en 1958, en Mallorca, y lo lucía, naturalmente, una extranjera.

Por aquello años las únicas visiones sobre cuerpos femeninos en revistas eran los anuncios de ropa interior, para los que había que importar modelos extranjeras. Pero en los años siguientes, aun siendo ilegal, la penetración del bikini fue aumentando. Ya dije que en 1962, y en Madrid, todavía alguien pudo calificar de "lamentable expansión pornográfica" unas cuantas fotos de castos bikinis (hay que advertir que no eran como los tangas de hoy, y ambas piezas eran bastante más grandes que las actuales). Por esa misma época, un iracundo amigo universitario, escandalizado ante el "dejarse ir" de algunas jóvenes, proponía medidas radicales contra ellas que no me atrevo a comentar hoy, pese a lo mucho que ha evolucionado la libertad de expresión.

En 1965 su uso se había generalizado en Cataluña, y la prensa madrileña comentaba a veces, no sin cierta severidad, que en esta tierra se usaba, "incluso por las catalanas, que se lo ponían con todo desparpajo", cosa que escandalizaba no poco en la capital. De esa época data la hazaña de las "nuevas Agustinas de Aragón", un grupo de chicas zaragozanas que, contraviniendo el reglamento, se exhibieron todas a la vez en bikini en su piscina, con gran batahola y comentario de la prensa. El caso llegó a ser comentado por el periodista Luis Carandell en su sección *Celtiberia Show*, que se publicaba en *Triunfo*, casi la única revista leíble del momento. El dibujante madrileño Mingote ilustró el hecho con un dibujo de una preciosa chica en bikini disparando un cañón con una mano mientras sostenía con la otra una pancarta con el lema: MUJERES ZARAGOZANAS PROTESTAN CONTRA LA PROHIBICIÓN DE UTILIZAR EL "BIKINI", que motivó divertidos comentarios en alguna prensa zaragozana. El diario *Amanecer*, bajo el título de *Pie para un dibujo de Mingote*, decía entre otras cosas:

"La indudable alusión a la figura histórica y gloriosa de Agustina de Aragón presentada de este modo, es a todas luces irrespetuosa e irreverente. Bien está el chiste, la guasa, cuando se refiere a personas indeterminadas; pero las personas reales, máxime si están muertas (sic) y con mayor motivo si fueron parte de los más hermoso de los pueblos, deben ser intocables y por tanto intocadas".



En esos años, por Madrid ya empezaban a verse bikinis en las piscinas, pero sólo los usaban las mujeres de mala vida (o buena, según se mire). Por aquellas días aterrizó en la pensión madrileña donde yo residía una chica venezolana con la que salíamos alguna vez los amigos a bañarnos. Al advertirle que si usaba sus trajes de dos piezas podía ser tomada por lo que no era, la chica se mostró desconcertada: "¡Pero si no tengo más que bikinis!", gimoteó, despavorida.

Curiosamente, por aquellos mismos años (exactamente en 1964) un diseñador de modas, de cuyo nombre no puedo acordarme (aunque quisiera) lanzó el *topless* o *monokini*, que era un traje de baño femenino que constaba sólo de un pantaloncito y tirantes. El escándalo fue mayúsculo, y la rechifla, general (en España casi ni nos enteramos). El diseñador profetizó: "Lo que ocurre es que yo voy quince años adelantado a mi tiempo".

Cuando, terminados los estudios, regresé a mi Cataluña, pude comprobar que efectivamente allí el uso del traje de dos piezas era general, especialmente en la Costa Brava. Los años siguientes fueron arrolladores. En 1970 el bikini se había impuesto ya en toda España, y por esa misma época empezaron a ablandarse las prendas interiores femeninas y el pezón mostraba su relieve a través de blusas y bañadores. Finalmente, en 1979 apareció ya públicamente el topless, que desde entonces se ha generalizado. ¡Cuánta razón tuvo su primitivo diseñador! ¡Quince años!

Josep M. Albaigès

EL BOOJUM SUPRIMIDO

For the Snark *was* a Boojum, you see.
(Pues el Snark era un Boojum, ya ves.)

Este es el piruetesco final de *La caza del Snark*. El mismo LC confesó en alguna ocasión que todo el poema se desarrollaba para llegar a este verso final, el primero que se le había ocurrido. Y ahí estamos como ante la estructura de la materia: Bien, pero, ¿qué son los quarks? ¿Y el Boojum?

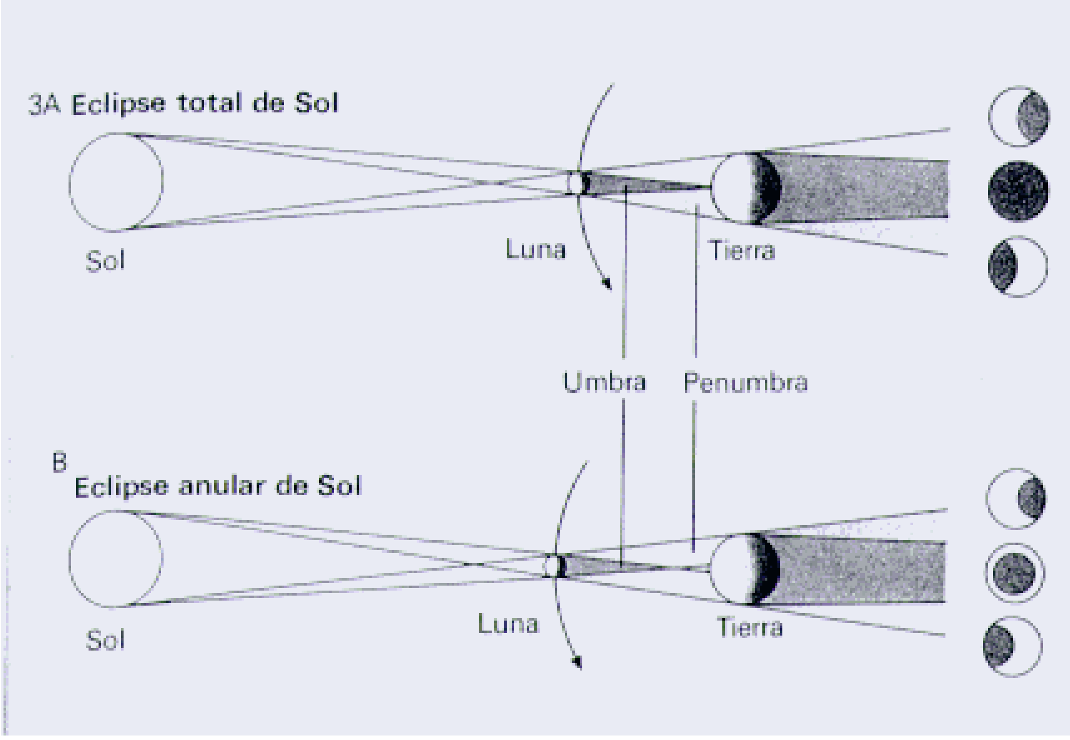
Según cuenta Henry Holiday, el dibujante del libro, el propio LC le contesto, una vez le había mandado su dibujo, que "el Boojum era algo completamente inimaginable", y quería que "la criatura permaneciera así". Añade Holiday: "Asentí, desde luego, aunque reacio a descartar lo que todavía confío en que era una representación valiosa. Espero que algún futuro Darwin, en un nuevo Beagle, encontrará la bestia, o sus restos, si lo hace, sé que confirmará mi dibujo".

El dibujo suprimido fue publicado por primera vez en 1932 (centenario del nacimiento de Carroll) en el *Listener*. ¿Qué mejor momento que el centenario de su muerte para hacerlo de nuevo?

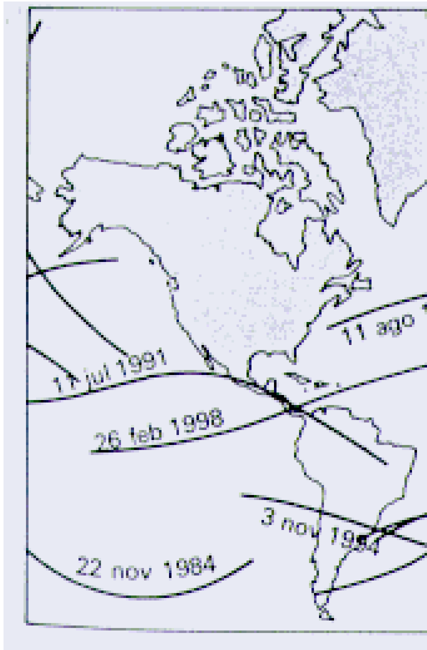
JMAiO, sep 98

LOS ECLIPSES Y SUS MARAVILLOSAS COINCIDENCIAS

(Nota: Este artículo es ampliación de **¿NO IRÁS A PERDERTE EL ECLIPSE?**, publicado en OMNIA.)



Las imágenes 1 y 2, familiares desde la escuela primaria, recuerdan el mecanismo de producción de los eclipses de Sol. En la primera el cono de sombra de la luna alcanza justo la Tierra, produciendo en ella una reducida zona de totalidad, mientras que en la segunda queda corto, conque la zona barrida por el cono inverso de sombra no es ya de eclipse total, sino anular.



En la imagen 3 se ven los recorridos de la sombra de la Luna en los eclipses próximos a 1999. Puede verse que las zonas de totalidad son pequeñas. El siguiente eclipse total de alguna importancia (21 de junio de 2001) será visible solamente en el Atlántico austral y algunos países del Cono Sur africano.

La proximidad del eclipse del 11 de agosto de 1999 hace oportuno recordar algunos de los hechos relacionados con los eclipses de Sol y Luna, que tanto han hecho progresar la Astronomía. En su producción intervienen una conjunción de circunstancias favorables realmente extraordinarias. Vamos a examinarlas.

- La primera: el enorme tamaño de la Luna, considerada como satélite (el diámetro es 3500 km., la cuarta parte del de la Tierra). Cierto que en el Sistema Solar los hay incluso mayores (el que más Ganimedes, con 5600 km), pero Júpiter, su planeta principal, tiene un volumen 1300 veces mayor que el de la Tierra.
- Gracias a este tamaño, el cono de sombra producido por la Luna llega a alcanzar en ocasiones la Tierra. También esta circunstancia se da en los satélites de Júpiter, pero en este caso cabe hablar más bien de la sombra sobre la inmensa atmósfera del planeta.

- Los tamaños aparentes del Sol y de la Luna son prácticamente idénticos. Esto no es más que una afortunada coincidencia, pero es claro que no pudo parecerlo a culturas antiguas, que buscaron en dicho "encaje" significados relacionados con la armonía y equilibrio del Universo. En las debidas circunstancias, la Luna "cubre" casi exactamente el Sol, ocultándolo por completo a nuestra vista. El ángulo aparente de uno y otra es, en números redondos, de 1/100 de radián (algo más de medio grado sexagesimal).
- De todos modos, esta coincidencia, que de ser exacta produciría la llegada justa del vértice del cono de sombra a la Tierra (con lo que el eclipse total sólo afectaría a un punto), tiene sus oscilaciones en más y en menos. En el perigeo, cuando la Luna está más cerca (distancia Tierra-Luna igual a 55 radios terrestres, o sea D = 55R), el diámetro aparente es algo mayor, y se dan las circunstancias favorables para el eclipse total, truncándose el cono, con lo que una reducida porción de la Tierra queda en sombra total (un óvalo móvil cuyo diámetro no excede los 300 km.). En cambio, cuando el eclipse se da en el apogeo (D = 64R), la sombra *queda corta,* y se produce un eclipse anular, ya que los puntos de la Tierra situados en la intersección del eje del cono de sombra ven al sol "mayor" que la Luna.

Resumiendo: esta casi coincidencia, oscilante, hace que en ocasiones una reducida zona de la superficie de la Tierra quede en la sombra, mientras que en otras ésta no llega a producirse. Esto permite razonamientos, cálculos y finalmente predicciones.

Con ser afortunadas estas coincidencias, todavía hay algunas que lo son más. Para comentarlas será preciso antes extendernos un poco en los movimientos relativos del Sol, la Tierra y la Luna.

Imaginemos la Tierra inmóvil en el espacio, prescindiendo incluso de su rotación diaria. Sabemos que el Sol recorre a lo largo de un año en sentido directo la eclíptica, circunferencia máxima celeste dividida en las doce famosas constelaciones de las que tanto partido sacan los sedicentes astrólogos. Se llama así porque, a lo largo del año, precisamente los eclipses jalonan su trazado.

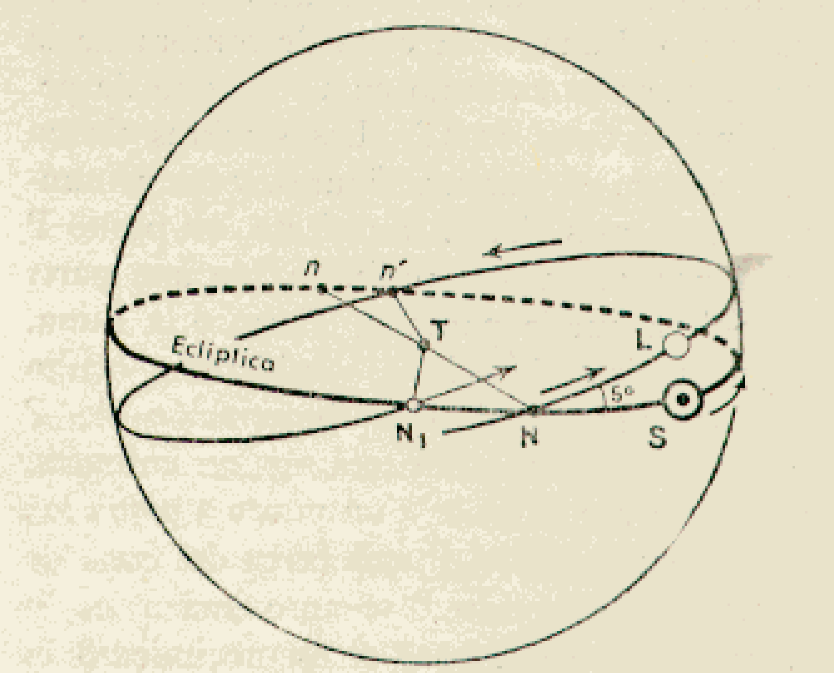


FIG. 11. Retrogradación de los nodos de la órbita lunar.
N y N_1, nodos ascendentes consecutivos ($NN_1 = 1°,565$);
n, nodo descendente teórico, opuesto a N (nodos *instantáneos*);

La Luna avanza más rápido en su camino aparente por el cielo, completando una vuelta cada mes. Si recorriera el mismo camino que el Sol, se producirían en cada lunación dos eclipses, uno de Sol en la Luna Nueva y otro de Luna en la Luna Llena. Pero la "eclíptica" de la Luna no coincide con la del Sol, aunque la corta en dos puntos, los llamados nodos, el ascendente y el descendente, N y n (Fig. 3). Cada vez que la Luna atraviesa uno de ellos (lo que ocurre cada seis meses aproximadamente) se produce una ocasión propicia para eclipses.

En realidad, éstos no podrían tener lugar tampoco si la Tierra fuera demasiado pequeña, salvo casos muy raros. Pero el tamaño de nuestro planeta hace que el paso por cada nodo dure lo suficiente para que la prolongación de los centros Sol-Luna (eje del cono de sombra) llegue a alcanzarnos. No sólo eso, sino que el paso es lo suficientemente lento para que lleguen a producirse dos ocasiones como mínimo, una para eclipse de Sol y otra para el de Luna. De hecho, a veces son incluso tres, y en estos casos los eclipses extremos son bastante leves (dos eclipses por la penumbra), y como compensación el central, fuerte (eclipse total).

La Luna vuelve a su nodo cada mes draconítico, D =27,2122 días, que es el tiempo que tarda en describir su ciclo en el cielo. Pero esto no coincide con la lunación, puesto que en ésta interviene además el movimiento de arrastre de la propia Tierra, variable según la época del año. En promedio, la lunación vale 29,53 días.

Hemos hablando antes de la trayectoria celeste "plana" de la Luna… en realidad no es así, puesto que la posición cada nodo retrograda a lo largo de la eclíptica de un paso a otro (ver figura). El tiempo que emplea el Sol en coincidir con el nodo es 346,62 días, período llamado año draconítico o de eclipses. Es decir, es unos 18 días más corto que el año solar.

¿Cada cuándo se repetirán los eclipses? Es claro que el período tiene que ser tanto un múltiplo del año draconítico, como de la lunación (29,53 días) como del mes draconítico. Las tres circunstancias se dan con sorprendente precisión en el llamado saro, período de 223 lunaciones. En efecto:

S = 223· 29,530588 = 6585,3211 días = 18 años y 10 u 11 días.

Esto equivale casi exactamente a 19 años draconíticos:

S ≅ 19 E = 19· 346,6200 = 6585,78 días

Y finalmente, equivale a 242 meses draconíticos:

$S \cong 242D = 242 \cdot 27{,}2122 = 6585{,}3567$ días

En circunstancias aleatorias, cabría esperar que una coincidencia de este tipo se produjera una vez cada varios siglos, pero ahí juega la más afortunada de todas las coincidencias. Aún más: el intervalo sobrante de 0,3211 días, que precisamente es también casi con exactitud 1/3 de día, hace que el eclipse de luna tenga lugar 8 horas más tarde de cuando lo fue el anterior, con lo que es posible que un espectador pueda no verlo. Pero cada tres saros (54 años y 32 días) las condiciones se repiten casi con total exactitud, al menos en lo que a los eclipses de Luna se refiere. Otra cosa son ya los de Sol en lo que se refiere a la banda de totalidad, pues ésta es tan estrecha que aunque cae en una zona relativamente cercana, puede desplazarse varios centenares de km al norte o al sur.

De todos modos, las irregularidades en el movimiento de la Tierra erosionarían rápidamente la regularidad del saro si no fuera por una nueva coincidencia: éste es también un múltiplo del llamado mes anomalístico (27,5546 días), intervalo del paso de la Luna por el perigeo. La siguiente igualdad completa la traca de las anteriores:

$S \cong 239A = 239 \cdot 27{,}5546 = 6585{,}5374$ días

También el saro anula las desigualdades del Sol, que dependen del año. La vuelta de la Tierra a su perihelio tiene por período el año anomalístico, $A' = 365{,}2596$ días, muy cercano al año juliano (por definición, 365,25 días) y las otras variedades del año (gregoriano, trópico o sideral). Pues bien:

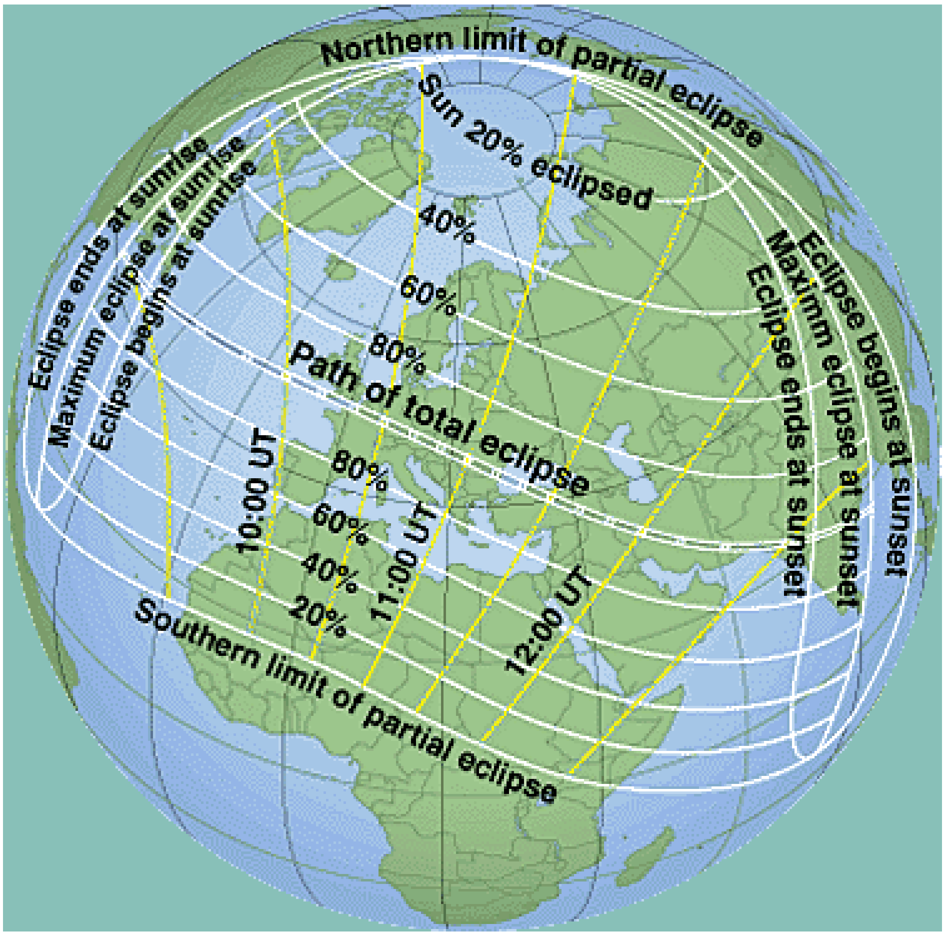
$S \cong 18A' = 6574{,}67$ días

Tan sólo faltarán 10 días para que la Tierra tenga la misma posición sobre su órbita.

En total, en un saro se dan:

- Luna: 14 eclipses por la penumbra y 28 por la sombra (14 parciales y 14 totales)
- Sol: 14 eclipses parciales y 28 centrales (totales o mixtos, y anulares)

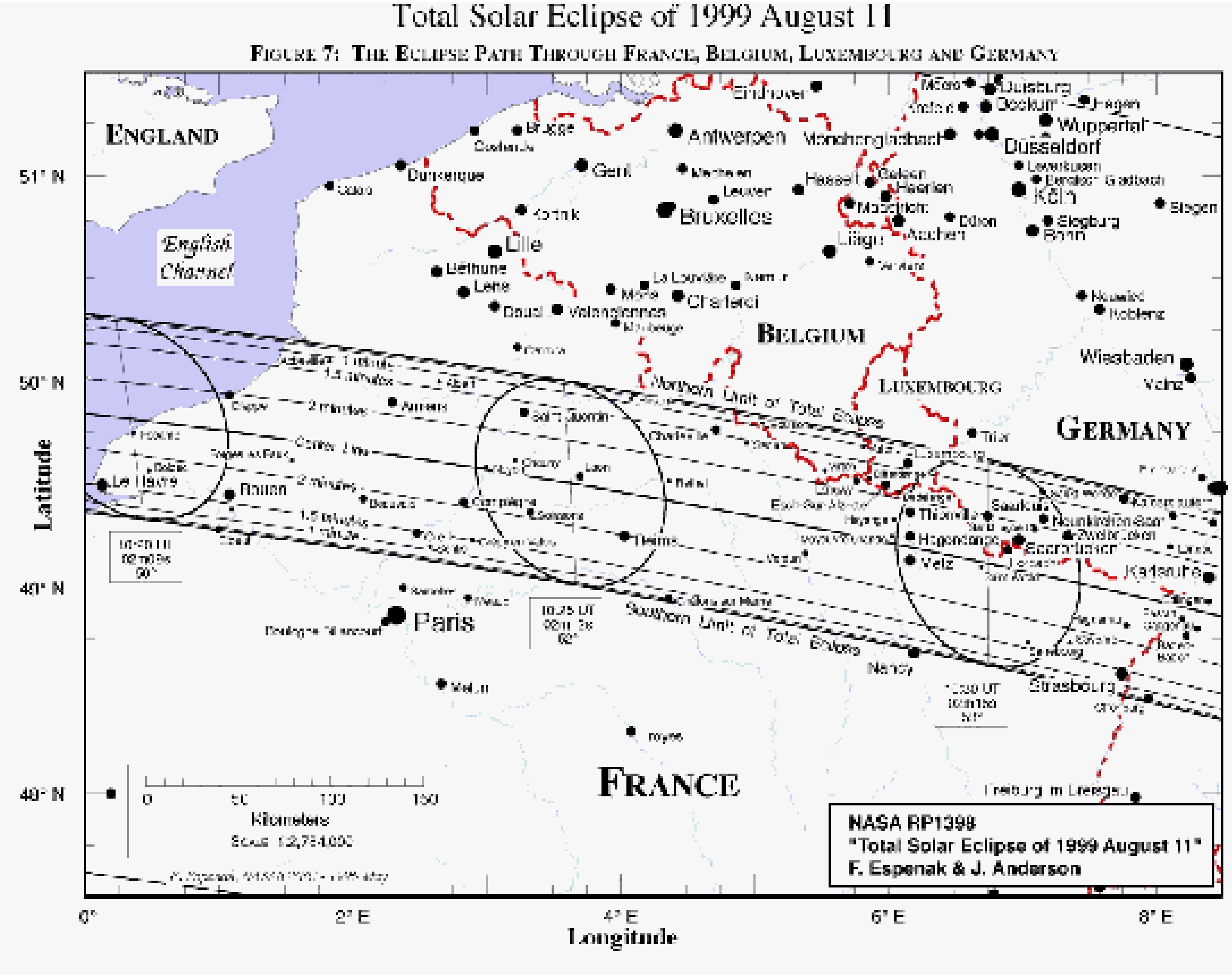
Resumiendo: cada 18 años y 10 u 11 días se repiten los eclipses. El homólogo al del año que viene tuvo lugar el 31 de julio de 1981, y barrió una zona de latitud similar al del que tendrá lugar en 1999… pero situada sobre Siberia. El próximo, en 2017, será visto en USA.



Este gráfico ilustra, sin necesidad de palabras, las zonas afectadas por el eclipse. En las zonas marcadas sobre el continente americano, apenas tienen tiempo de verlo, puesto que el espectáculo termina cuando sale para ellos el sol. Como compensación, podrán seguirlo a simple vista en las zonas de parcialidad (casi todo el óvalo apuntado de la izquierda). Simétricamente ocurre en Siberia central y la India, donde la puesta del sol les impide disfrutar del espectáculo.

Cuanto más nos alejamos de la banda de totalidad, más fuerte es el eclipse. En el Cantábrico español se alcanzarán magnitudes del 80 %, conque serán visibles algunos de los efectos relacionados con los fenómenos que acompañan a una puesta de sol (migraciones animales, luz crepuscular). En el Sahara central y en el casquete polar meridional apenas se darán cuenta, y los países guineanos quedan ya fuera de él.

Francia viene a quedar en el centro de la franja de totalidad. Ampliada, ésta es:



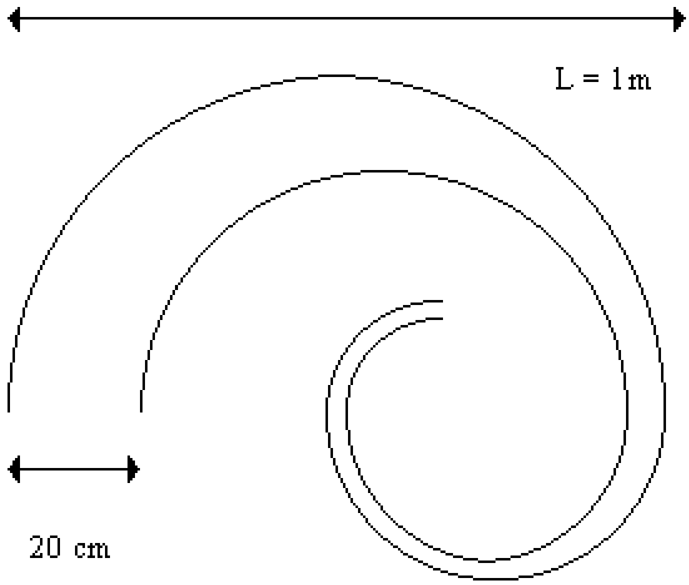
En el eclipse del año próximo se dan las circunstancias de proximidad suficientes para que valga la pena hacer un viaje para verlo. En un artículo publicado en OMNIA expuse una descripción del eclipse, por lo que a él remito a los lectores interesados. Repito ahora únicamente la zona afectada por el eclipse y la banda de totalidad más próxima a nosotros.

JMAiO

LA ESPIRAL DE ROBERTO HERRERA PÉREZ

Una antigua amiga me presenta un problema bastante sencillo; pero que a mí me resulta imposible dado mi reducido conocimiento de las matemáticas y de la geometría.

Desea saber la superficie de una espiral. Desea saber la fórmula empírica así como un caso en concreto. Según el dibujo adjunto, si A= 1 metro y B= 20 centímetros, ¿ Cuánto vale el área de la espiral ?. ¿Hay una fórmula empírica para calcularla en función de A y B?. ¿Se necesita saber algún dato más (por ejemplo algún radio) ?.



El problema no está totalmente determinado. Creo interpretarlo adecuadamente si supongo que cada brazo de la espiral está formado por semicircunferencias. En este caso, la mayor tiene un diámetro de 1 m, y la que la acompaña de 0,70 m, ya que supongo que el grosor de la figura a la derecha es solamente de 10 cm para que el primer brazo pueda empalmar con el siguiente par de semicircunferencias, y así sucesivamente.

En este caso, el área de la primera media vuelta es $S_1 = \frac{\pi}{8}\left(1^2 - 0{,}7^2\right)$

Cada media vuelta de la espiral tiene un área igual a la cuarta parte de la anterior (pues sus dimensiones son la mitad). Por tanto, el conjunto de las áreas forma una progresión geométrica de razón ¼, y según la fórmula de la suma de la progresiones geométricas, el área total valdrá:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\frac{\pi}{8}\left(1^2 - 0{,}7^2\right) = \frac{\pi}{6}\left(1^2 - 0{,}7^2\right) = 0{,}7434 \ m^2$$

En general, si son r1, r1 los radios de la primera semivuelta, el área será:

$$S = \frac{2\pi}{3}\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

El problema admite otras interpretaciones. Por ejemplo, considerar que las dos espirales son de tipo logarítmico, con centro en el punto de abscisa $x_c = 2/3$, y calcular la integral correspondiente. De todos modos, el resultado no sería muy distinto.

JMAiO, jul 98

LA HORA PUBLICITARIA

Es un hecho muy conocido que la hora marcada en la propaganda de los relojes de pulsera, siempre es las 10 y 10 minutos. El tema ha motivado incluso consultas en la sección de cartas a los periódicos, a las que han correspondido los relojeros apelando a razones de estética.

Será. Pero a nosotros matemáticos, esto nos plantea de inmediato el **Problema número 1**: ¿Qué hora deberá marcar exactamente el reloj para que los ángulos de horario y minutero respecto a las 12 h sean iguales?

Este problema es fácil. Pero puede plantearse uno más laborioso. A veces el reloj incluye segundero, y en este caso éste marca las 6 aproximadamente (los 30^s), de modo que los ángulos de las tres agujas son aproximadamente iguales, de unos 120º. No es difícil demostrar que no pueden ser matemáticamente iguales a 120º. Pero ahí viene el **Problema número 2**: ¿Cuál es la hora que deberá marcar el reloj para que los tres ángulos se aproximen más a 120º? Entendemos por "aproximarse más" que la suma de las diferencias en valor absoluto de cada ángulo con 120º sea lo menor posible.

Este espacio ha sido dejado en blanco deliberadamente para no descubrir por accidente la solución

---

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LA HORA PUBLICITARIA

Problema número 1.

Si llamamos x al ángulo que el horario forma con la línea de las 10 h, el que el minutero formara con las 12 h será 12x, pues el minutero avanza 12 veces más aprisa que el horario. Siendo el ángulo entre las 10 y las 12 de 60º, la ecuación es obvia:

$12x = 60 - x$

De donde resulta x = 60/13 de grado. Puesto que 360º corresponden a 12 h, el ángulo equivale a 2/13 de hora. Es decir, que la hora marcada por el reloj es $10^h\ 9^m\ 13^s$ 11/13.

Problema número 2.

Si el ángulo entre el horario y el minutero fuera exactamente de 120º, por consideraciones similares obtenemos que el ángulo x vale en este caso 60/11 de grado, es decir, que el reloj marcaría las 10h 10m 54s 6/11. Pero entonces el segundero marcaría unos 54 s, muy lejos de los 30^s. Se concluye que el punto óptimo que buscamos ha tenido lugar hace aproximadamente medio minuto.

Supongamos ahora que el ángulo del horario con las 10^h es $x - \varepsilon$. Recordando que el segundero va 60 veces más aprisa que el minutero, los valores quedan ahora convertidos en:

- Ángulo del horario: 60/11 - ε
- Ángulo del minutero: 720/11 - 12ε
- Ángulo del segundero: 60(720/11 - 12ε) = 43200/11 - 720ε mod 360 = 43200/11 - 3600 - 720ε = 3600/11 - 720ε

Del ángulo del segundero hemos restado un número suficiente de circunferencias, concretamente 10, o sea 3600º, para conseguir que el valor final sea inferior a 360º.

En primera aproximación, podemos concluir que ε deberá ser del orden de medio minuto horario (o sea unos 3º). Veamos los ángulos entre las respectivas manecillas.

- Ángulo horario-minutero: $\alpha_1 = \frac{720}{11} - 12\varepsilon + 60 - \left[\frac{60}{11} - \varepsilon\right] = 120 - 11\varepsilon$ (obvio)
- Ángulo minutero-segundero: $\alpha_2 = \frac{3600}{11} - 720\varepsilon - \frac{720}{11} + 12\varepsilon = \frac{2880}{11} - 708\varepsilon$
- Ángulo segundero-horario: $\alpha_3 = 300 + \frac{60}{11} - \varepsilon - \frac{3600}{11} + 720\varepsilon = -\frac{240}{11} + 719\varepsilon$

Ahora se trata de hallar el mínimo de la suma:

$$S = |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = |-11\varepsilon| + \left|\frac{2880}{11} - 708\varepsilon - 120\right| + \left|-\frac{240}{11} + 719\varepsilon - 120\right| =$$

$$= |-11\varepsilon| + \left|\frac{1560}{11} - 708\varepsilon\right| + \left|-\frac{1560}{11} + 719\varepsilon\right|$$

Unos tanteos rápidos concluyen que el mínimo se alcanza cuando el tercer paréntesis se anula, o sea para ε = 1560/7909 grados. Con lo cual el ángulo buscado vale:

x = 41580/7909 grados. Este ángulo equivale a 1386/7909 de hora. O sea que son las:

$$\mathbf{10^h\ 10^m\ 30^s\ 630/719}$$

Como se ve, el resultado es de lo mas preciso. Los ángulos valen:

$$\alpha_1 = \mathbf{117{,}83º}$$
$$\alpha_2 = \mathbf{122{,}17º}$$
$$\alpha_3 = \mathbf{120{,}00º}$$

Josep M. Albaigès

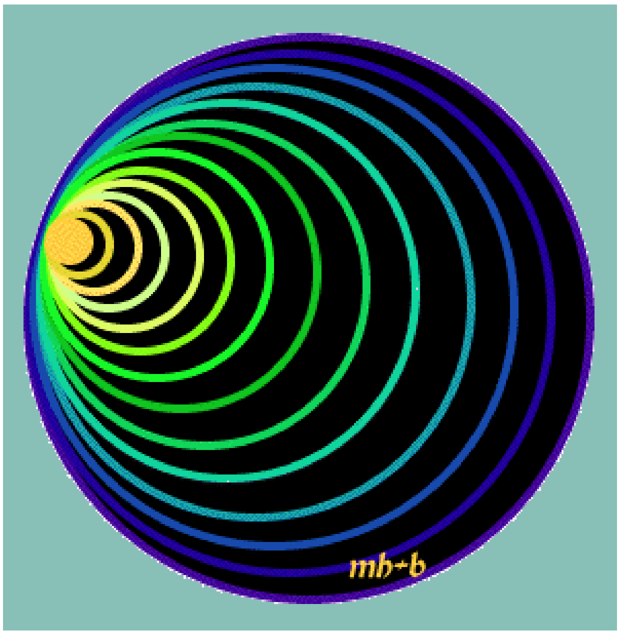
Barcelona, ago 98

LOS DIBUJOS DE MARTHA HOBART

Nuestra veterana carrollista Martha Hobbarth, en Bubión (Granada), en el corazón de las Alpujarras, halla tiempo para mantener una deliciosa página Web con sus sugerentes imágenes y poemas.

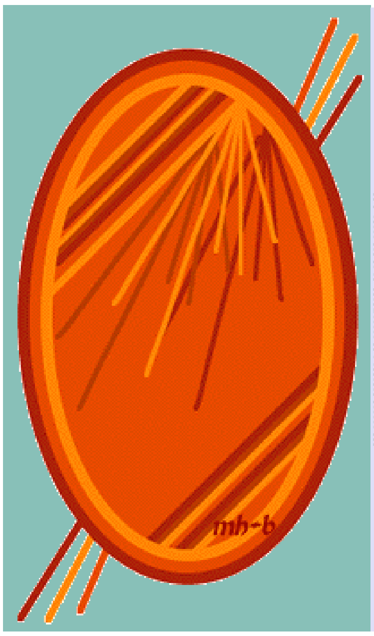
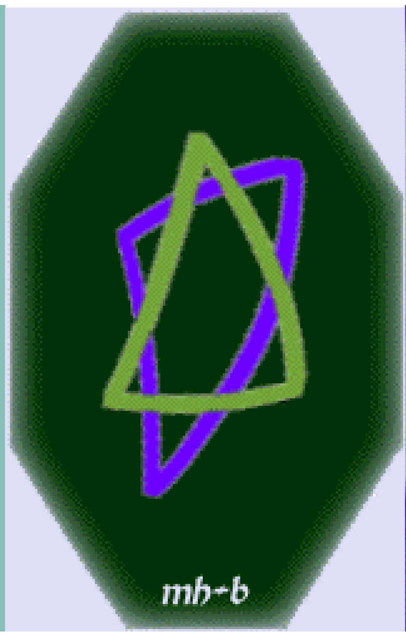
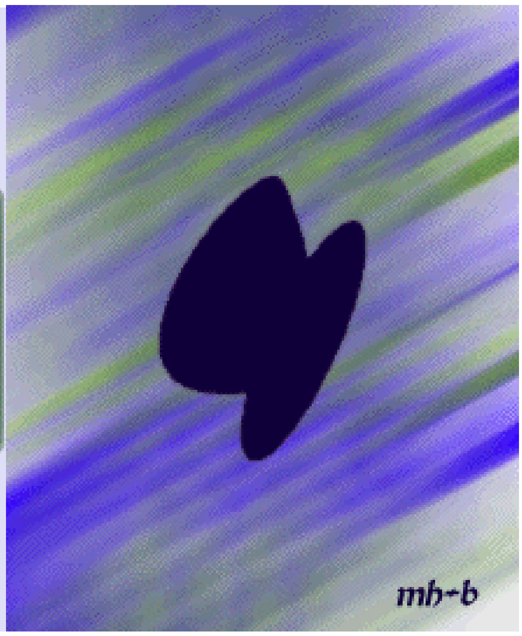
No dejéis de visitarla:

Hobart, Martha	http://www.geocities.com/SoHo/gallery/5407



Circles of time draw me in,
then fling me out to space.
Rings of time
becoming timeless.

Círculos del tiempo
me atraen,
luego me lanzan al espacio.
Anillos del tiempo
que devienen eternos.



Green of grass,
blue of sky,
in an explosion of sun-color.

Verde de la hierba,
azul del cielo,
en un estallido color del sol.

Red is the color of blood,
blood of life.
Black are the depths
whence life comes.

Negras son las profundidades
Rojo es el color de la sangre,
sangre de la vida.
de donde surge la vida.

Dark of the womb.
Bottomless sea,
Heart of the earth.
Void of space, home of the stars.

Oscuridad de las entrañas maternas.
El mar sin fondo.
Corazón de la tierra.
Vacío del espacio, morada de las estrellas.

Stars requiring no further comment
than your thoughts.

Estrellas que no necesitan más comentario
que tus pensamientos.

EL JUEGO DE LAS TRES MENTIRAS

Es muy frecuente aplicar los epítetos por tríos, con lo cual quedan más redondos. Pero ese mismo afán de alcanzar la terna lleva a exageraciones y mentiras. Veamos unos ejemplos.

Aldeanueva de Ebro.

Población riojana, entre Calahorra y Alfaro. Es llamada "la de las tres mentiras", pues ni es aldea, ni es nueva, ni está cabe el Ebro, sino a unos 2 km.

Los Siete Niños de Écija.

Famoso grupo de bandoleros, que actuaron en 1814-1818, dominando la carretera general de Andalucía, entre Sevilla y Córdoba. Pero ni eran siete, ni eran niños, ni eran de Écija.

Una, Grande, Libre.

No era Una (como mínimo dos, por culpa de la represión), ni era Grande (la miseria de los años de postguerra llegó a imponer racionamientos), ni, mucho menos Libre (sobran los comentarios a este punto).

OTRA VEZ EL AGUJERO DE OZONO

En algunas ocasiones se han tocado en [C] los temas ecologistas. En la última, entre otros temas, apareció el agujero de ozono, tan de moda. Se plantearon en aquella ocasión algunas dudas:

- ¿Por qué el agujero está precisamente en el hemisferio Sur, si los CFC se producen mayoritariamente en el Norte?
- ¿No será que el agujero ha estado en realidad siempre ahí, y sólo ahora lo hemos puesto de moda?

¿Por qué el ozono desempeña un papel tan importante para la vida terrestre? De hecho, la cantidad presente en la estratosfera es comparativamente pequeña: de hallarse uniformemente repartido sobre la Tierra, a la presión de la superficie, las existencias totales de gas O_3 ocuparían una capa de unos 3 mm de espesor. No es mucho, pues, el que tenemos en existencia.

A las alturas estratosféricas la capa tiene un espesor algo mayor, al ser menor también la presión, pero sigue siendo de todos modos delgada. Aun así desempeña un importante papel de protección al detener gran parte de la radiación ultravioleta llamada UV-B, comprendida entre 280 y 324 nm de longitud de onda. Esta radiación es perjudicial para los tejidos de los seres vivos, y su aumento podría producir lesiones cutáneas y oculares, así como alteraciones en la función fotosintética de las plantas, e incluso (siempre dentro del quizás) posibles alteraciones de los ADN portadores del código genético. Algunos investigadores médicos han calculado, lo que ya es afinar, que un aumento de un n % en la radiación UV-B recibida comportaría un aumento de un 2n % de casos de cáncer de piel.

El tema merece, pues, atención, pero hay que acoger con cuidado tales profecías. Hay que recordar que en los años 70, cuando el combinado Francia-Reino Unido hizo su apuesta técnica más importante del siglo con el avión *Concorde*, muchos profetas auguraron que los vuelos de éste, efectuados en la estratosfera, iban a acarrear en pocos años a destrucción de la capa (sus gases, en los que habría un alto contenido de nitrados, provocarían un efecto químico en cadena). Recuerdo que estaban de moda en esa época unos convincentes gráficos de unas marañas de aviones cubriendo la Tierra con sus vuelos y sembrando la propagación del gas por doquier.

Pero por lo visto esto no ha sido así (los profetas impenitentes dicen que porque existen muchos menos *Concordes* en vuelo que los previstos al principio). Pero, cuando la humanidad se había tranquilizado algo ya sobre el famoso avión, hete aquí que ahora se vuelve a la carga con el agujero austral.

He tenido ocasión de documentarme algo sobre el tema, y no quiero dejar pasar la ocasión sin ofrecer a los lectores algunas consideraciones sobre él. Para hacer un poco de historia, hay que recordar que en los años 20 se diseñaron los primeros dispositivos que medían la concentración de ozono presente en la atmósfera. Pero hasta el Año Geofísico Internacional (1958) no se instalaron los primeros aparatos medidores en la Antártida. Y hasta 1984 no fue lanzada la primera señal de alerta sobre la pérdida de ozono en esa región: cada primavera austral se producía un decrecimiento anómalo en el contenido de ozono (de hecho, casi su desaparición) en grandes partes del casquete austral (la generalización del fenómeno fue ratificada mediante satélites artificiales), si bien poco después el déficit se recuperaba.

¿Cómo se produce y elimina el O_3? La incidencia de la radiación ultravioleta de longitud de onda $\lambda < 242$ nm rompe la molécula de oxígeno, y éste reacciona catalíticamente con otro compuesto M para producir ozono. O sea:

O_2 + hv = O + O
O_2 + O + M = O_3 + M

Si este proceso continuara indefinidamente,. Pronto la cantidad de ozono sería muy superior a la antes mencionada. Y es que se da un proceso de destrucción ozónica similar:

O_3 + O = $2O_2$
O_3 + hv' = O + O_2

Pero el segundo grupo de reacciones es por sí mismo incapaz de contrarrestar el primero. E l mecanismo principal de destrucción es otro ciclo catalítico del tipo:

X + O3 = XO + O2
XO + O = X + O2

Donde las especies X son principalmente monóxidos de nitrógeno y de cloro.

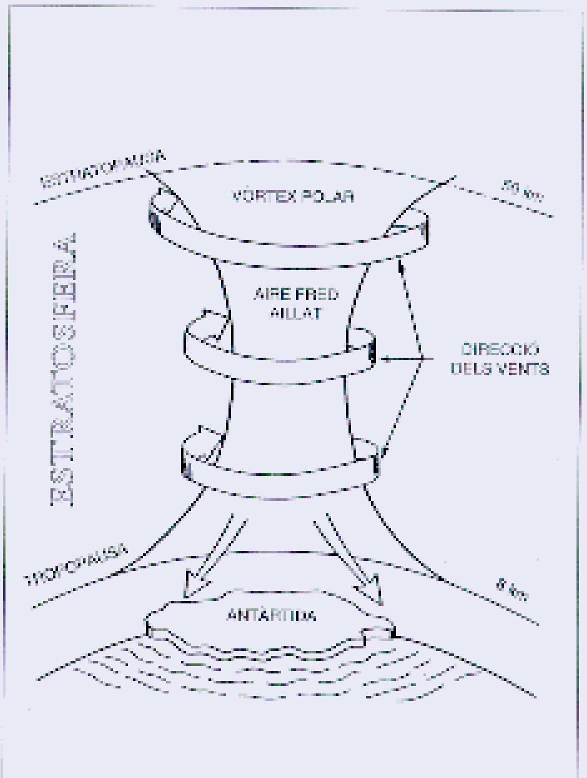


Figura 11. Esquema de la circulació en el vòrtex polar. (Segons Cacho, J. i Sáiz de Aja, 1990).

Y ahora regresemos a nuestra primera pregunta: ¿Por qué en la Antártida precisamente? A ello responden los científicos con diversas hipótesis, que resumiremos. La situación del casquete polar austral, con un continente de forma casi circular y centrado en el Polo Sur, es la inversa del septentrional, donde es el Océano Glacial Ártico el que está rodeado de continentes, y esto hace que la situación térmica sea muy distinta. Como es sabido, un centro de bajas temperaturas (borrasca o ciclón) provoca corrientes de aire que rápidamente, por el efecto Coriolis, adquieren dirección envolvente, dejando el centro de depresión a su derecha en el hemisferio Sur. Este "vórtice polar", como ha sido llamado, establece en su interior una zona térmicamente aislada, en la que se dan las condiciones para la aparición invernal de las llamadas *nubes estratosféricas polares* (NEP), que se convierten en sede de reacciones que posibilitan la entrada en acción de los compuesto de cloro y nitrógenos (los anteriores X, entre los cuales se hallan los temibles CFC), que durante la mayor parte del año permanecían combinados de forma tenue con otros compuestos en la estratosfera. De tal modo que en ese período el proceso de destrucción alcanza plena intensidad. Más tarde las NEP desaparecen, el agujero se regenera y vuelta a empezar en la temporada siguiente.

¿Por qué el agujero empezó a formarse en el decenio de 1970? La explicación tradicional es que en esta época empezó a hacerse notar el efecto de los halocarburos (así es como se llaman hoy los clorofluorocarburos o CFC), descuidadamente lanzados a la atmósfera desde muchos años antes. Pero esta explicación dista mucho de satisfacernos. Pues ni queda claro el por qué tuvieron que transcurrir tantos años desde el principio del empleo de los CFC, ni, sobre todo, por qué no ha desaparecido ya totalmente la capa de manera irreversible, lo que tendría que haber ocurrido ya visto el ritmo exponencial en el aumento del consumo de dichos gases. Lejos de esto, el agujero aparece y desaparece cíclicamente, con avances y retrocesos (algunos incluso hablan de un período bienal en estas fluctuaciones, lo que de nuevo ya es afinar).

No olvidemos que los mismos científicos (científicos, no militantes en *Greenpeace*) que han lanzado estas hipótesis insisten en que se trata sólo de esto, hipótesis. De hecho, salta a la vista que la teoría de la acción de los NEP ha sido establecida buscando un efecto que se apoyara en los hechos ciertos: es cierto que aparece el agujero de ozono, y es cierta la presencia de los NEP, pero todo lo demás son teorías que recuerdan las que en su día se establecieron sobre el Concorde.

¿A qué atenernos, pues? No hay duda de que, si lo postulado por los científicos es cierto, hay motivos para alarmarse y debería emprenderse de modo inmediato un drástico recorte en el consumo de los CFC. Pero lo malo de todo esto es que no existen evidencias suficientes todavía, y modificar un plan mundial relativo a la producción en base al grado de certeza de las conclusiones, sobre las cuales ningún científico serio se ha atrevido a preocuparse (insisto: científicos serios, no ecologistas), sería sencillamente delirante.

Por tanto, no hay más remedio que seguir esperando: ni el período transcurrido es suficiente, ni las hipótesis están comprobadas, y ni siquiera estas hipótesis explican satisfactoriamente el fenómeno. Lo bueno es que este caso me recuerda la fábula del pastorcillo y el lobo: cuando aparece éste,

…entonces el chaval se desgañita,
y por más que patea, llora y grita
no acude la gente escarmentada,
y el lobo le devora la manada.

¿Acabarán los CFC devorando nuestra manada? El tema es motivo de reflexión tanto par los científicos como para los ecologistas, algunos de los cuales, con sus actitudes a menudo histriónicas y sectarias han sentado las bases de una desconfianza generalizada sobre las acciones del grupo, no digamos ya sobre sus profecías.

JMAiO, jul 98

LAS PARADOJAS DE LA DECISIÓN RACIONAL

En lenguaje llano, se entiende por decisión la elección de un "decisor" de una entre varias alternativas. La decisión racional será aquélla basada en un análisis racional de los hechos. Y dentro de las decisiones racionales juegan un papel especialmente importante aquéllas en que los propios hechos generados por la decisión no son enteramente conocidos, sino que forman parte de un "universo aleatorio" sólo previsible de manera no unívoca. En este caso (que es el más frecuente) resulta una gran ayuda en la decisión racional el hecho de que las distintas alternativas sean *probabilizables*, es decir, que puedan calcularse (o al menos estimarse) las respectivas probabilidades de su aparición.

Ya situados en este caso, un criterio generalmente aceptado es el de la maximización de la esperanza matemática del resultado de la decisión. Por ejemplo, sea el caso en que la decisión entre las alternativas A y B conduce, con probabilidades respectivas de 1/3 y 2/3, a "premios" de 3.000.000 y 1.200.000 Pta. En un caso como éste, las esperanzas matemáticas respectivas son $E_1 = \frac{1}{3} \cdot 3000000 = 1000000$ Pta y $E_2 = \frac{2}{3} \cdot 1200000 = 800000$ Pta. Luego, la alternativa A deberá ser preferida a la B.

Sin embargo, este tipo (u otros que iremos viendo) de "decisión racional" conducen pronto a fuertes paradojas. Quizá la más conocida sea la de San Petersburgo. En ella dos jugadores contienden con una moneda. En cada partida se lanza ésta tantas veces como sea necesario para que aparezca una cara. El primer jugador entrega siempre al segundo la cantidad fija de 1000 Pta, mientras que el segundo entrega al primero 2^N Pta, siendo N el número de veces que tarda en salir la primera cara. Es decir, que si por ejemplo la primera cara aparece a la primera tirada, el segundo jugador entrega 2 Pta, y el saldo, favorable a éste, es de 998 Pta. Si la primera cara aparece a la quinta tirada, el segundo jugador paga 32 Pta, y el saldo, nuevamente favorable a éste, es de 968 Pta. Sólo a partir de que la primera cara aparezca a la 10ª tirada o más allá, el primer jugador empieza a percibir beneficios.

Este juego parece netamente favorable al segundo jugador, y sin embargo el análisis matemático arroja para el primero una esperanza matemática:

$E_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots$, es decir, superior, no ya a 1000 Pta, sino a cualquier valor. Sin embargo, pocos arriesgarían su dinero jugando en el papel del primer jugador.

Podemos clasificar las paradojas surgidas como consecuencia de diversos modelos de decisión racional en tres tipos principales:

Paradojas lógicas. Son quizás las más "duras", porque ponen en evidencia contradicciones en el sistema lógico utilizado, y para salir de ellas a menudo el único camino es la ampliación del campo operativo lógico (lo que, de paso, suele proporcional el beneficio colateral del conocimiento de nuevos sistemas lógicos). Son muy conocidas la del mentiroso, la de Aquiles y la tortuga, etc.

Un caso especialmente interesante en este tipo de paradojas es la de la "optimización". En ella un decisor optimiza su comportamiento optando por la acción que le proporciona la mayor utilidad. Pero esta determinación exige unos cálculos que tienen obviamente un coste (v. gr., el presupuesto que hay que pagar para saber si sale a cuenta reparar el televisor o es mejor tirarlo). Hay que proceder entonces a una meta-optimización aplicada a estos costes ("¿Cuánto me costaría, *más o menos*, el presupuesto?"), en la que surgen nuevos elementos optimizables, pudiendo generarse al así un "bucle decisional" no siempre convergente.

Otro caso ciertamente interesante es la "paradoja de Nash", donde un matrimonio debe decidir entre ir, cada uno o juntos, al fútbol o al ballet. El marido prefiere fútbol (valor 1, valor 0 para el ballet), y la mujer al contrario. Pero cada uno de ellos concede valor superior (2, por ejemplo) al hecho de ir en compañía del otro. El bucle generado es:

Marido→ Mujer↓	**Fútbol**		**Ballet**
Fútbol	(3,2)	←	(1,1)
	↑		↓
Ballet	(0,0)	→	(2,3)

Los puntos (F,B) o (B,F) son para cada uno de ellos menos favorables que los (B,B) o (F,F), por lo que ambos huirán de los primeros tendiendo a uno de los otros dos. La solución final es indeterminada, y depende de otros factores (la capacidad de persuasión de cada uno, por ejemplo), distintos de la mera racionalidad.

Paradojas conceptuales. Son un tipo más "suave" de paradojas, pues resultan de la aplicación de un "experimiento mental" a un proceso, por el que se llega a resultados difícilmente admisibles. La paradoja de Langevin, el demonio de Maxwell constituyen ejemplos bien conocidos en la Física. La malignidad de estas paradojas reside en el hecho de que ponen en contradicción los conceptos con su utilización, obligando a revisar las reglas operativas que los rigen, u obligan incluso a concluir que tales reglas no son más que la expresión de la imposibilidad de aplicar con todas sus consecuencias el modelo lógico postulado al fenómeno que se está estudiando.

Un caso bien conocido por los aficionados a la matemática recreativa es la llamada "paradoja de Newcomb". En ella se supone que el decisor, puesto delante de las cajas A (transparente, que contiene 1 MPta) y B (opaca, que puede contener 0 Pta o 5 MPta) puede elegir entre tomar la B o ambas. Un ser "divino", al que llamaremos "el demiurgo" es capaz de adivinar la decisión, y situará 0 MPta en la caja B (*antes de la elección del jugador*) si prevé que el decisor va a tomar ambas, y 5 M Pta si prevé que tomará sólo una de ellas.

El esquema decisorio es ahora:

El decisor escoge	**El demiurgo anticipa**	
	1 caja	**2 cajas**
1 sola caja	5	0
2 cajas	6	1

Cualquiera sea lo que ha hecho ("ha jugado") previamente el demiurgo, sale más a cuenta al decisor escoger 2 cajas. En efecto, puesto que en la B hay ya… lo que haya, no cambiará por el hecho de decidir una u otra posibilidad. ¿A qué, pues, renunciar tontamente al contenido de la caja A?

¡Sin embargo, si hace tal cosa, hallará la caja B vacía! Aquí juega el hecho lógico de que la anticipación del futuro implica la modificación de éste, por lo que es lógicamente contradictorio.

Paradojas empíricas. Se trata de una nueva forma "suave" de paradojas, que en ocasiones sólo ponen a la luz nuevos aspectos a mejorar en las teorías (en Física, el experimento de Michelson-Morley para medir la velocidad de ella luz), pero en ocasiones revelan mecanismos de decisión humanos de una "racionalidad" distinta a las más elementales. Un caso muy sencillo, que se contradice con lo hablado anteriormente sobre la optimización de la esperanza matemática, sería formular al decisor la pregunta: "¿Prefiere e Vd. 1.000.000 Pta o el 50 % de probabilidad de 3 M Pta? Mucha gente optaría por la primera posibilidad.

Una forma más compleja de este tipo de contradicciones es la "paradoja de Allais", en la que un decisor debe efectuar dos decisiones sucesivas entre las parejas de loterías A1 y B1 por una parte, y A2 y B2 por la otra, con un esquema de probabilidades-ganancias como el siguiente:

p = 0,08; G = 150 M Pta p = 0,8; G = 150 M Pta

$A_1 < A_{2<}$ p = 0,92; G = 0 Pta p = 0,2; G = 0

p = 0,1; G = 100 Mpta

$B_1 < B_{2<}$ p = 1; G =100 M Pta

p = 0,9; G = 0 Pta

La mayoría de decisores preferiría A_1 a B_1, pues se opta con ello a una ganancia mucho mayor con una probabilidad apenas inferior, lo que está en contradicción con el criterio de maximización de la utilidad de la ganancia, que impone elegir simultáneamente A_1 y A_2, o simultáneamente B_1 y B_2.

Josep M. Albaigès

UNA CUESTIÓN SOBRE LA LOTERÍA PRIMITIVA

En los sorteos de la lotería primitiva los seis números no salen del bombo en general por orden, pero ordenados nos los presentan en la TV y la prensa. ¿Es posible que en alguna ocasión hayan salido precisamente por el orden en que son expuestos?

El número de combinaciones distintas de números premiados es ciertamente importante:

$$V_{49}^{6} = \frac{49!}{43!} = 1{,}0068 \cdot 10^{10}$$

Dada una cualquiera de ellas, los seis números que la integran podrán haber salido de 6! = 720 maneras diferentes. Y sólo una de ellas guarda el orden ascendente de números, por tanto la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 0{,}00139$$

Es decir, que solamente en un 0,13 % de los sorteos saldrán los números por orden. En toda la historia de la lotería primitiva desde que se reinstauró apenas habrá sucedido esto una vez. En general, para n números, la probabilidad sería 1/n!.

JMAiO, ago 98

DE LA PRODIGIOSA (?) EXPANSIÓN DE LA DEVOCIÓN A SANTA ROSITA DE LIMA.

J. A. de Echagüe

Hace ya unos cuantos años estuvo muy en boga una curiosa práctica lúdico-mística que con el pretexto de extender la devoción a Santa Rosita de Lima o a Santa Gema Galgani, por citar algún caso, pienso más bien procuraba entretenimiento a ociosos o desocupados.

¿No recuerdan? Un buen día se recibía una carta con una oración al Santo o Santa de turno y con instrucciones estrictas para que enviase a su vez copias de la misma a amigos o conocidos a fin de extender rápidamente por todo el orbe tan devota práctica. Normalmente se prometían venturas a quienes tal hiciesen, y se advertía muy seriamente de los riesgos eternos en que podrían incurrir quienes adoptasen actitudes tibias o indiferentes, y nada digamos si lo tomaban a broma.

La cuestión que ahora nos interesa es si un proceso como el indicado asegura realmente la extensión del "mensaje" a todo el mundo, supuesto que nadie se lo tome broma y todos colaboren; ¿será así?

Si analizamos el problema nos encontramos con que el proceso que implica es mucho más complejo de lo que podría pensarse a primera vista y desde luego, es sumamente interesante. Pensemos que no es una cuestión tan trivial en vez de un juego intrascendente o de una devoción exagerada podría tratarse de un problema de reproducción biológica; o de un proceso de desintegración atómica, que obviamente no suelen ser cuestiones de broma.

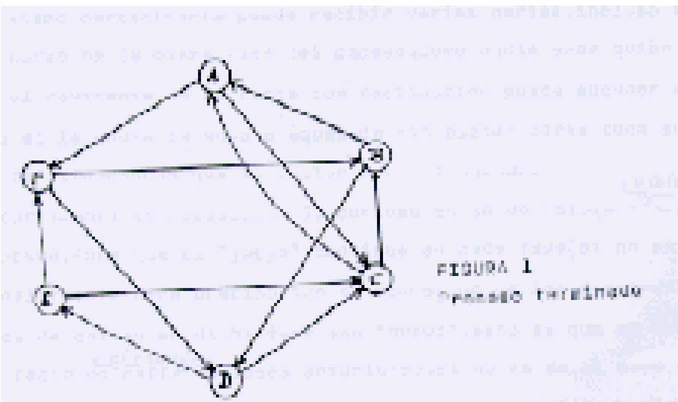
Lo mejor es examinar un caso concreto viendo a dónde nos conduce. Para mejor apreciarlo pondremos un caso muy simplificado pero que contiene todos los elementos básicos del problema. Supondremos que tenemos un grupo compuesto por SEIS amigos: A;B;C;D;E y F. Uno cualquiera de ellos —por ejemplo A— envía sendas cartas a DOS (2) amigos distintos con instrucción de que cada uno haga lo mismo con otros dos (2) amigos de la lista de seis que todos poseen, los cuales al recibir sus cartas a su vez harán lo mismo; etc., etc.

Conviene hacer algunas precisiones. Todo el que reciba una carta deberá enviar dos copias a otros dos miembros de la lista, pero sólo una vez; esto es, si. alguien vuelve a recibir carta por segunda o tercera vez (lo que es perfectamente posible) no debe volver a enviar cartas a nadie; queda ya fuera del juego aunque puede seguir recibiendo avisos.

Quien reciba carta (por primera vez) enviará dos cartas a dos miembros de la lista elegidos al azar de entre los otros cinco. Lógicamente nadie se envía cartas a sí mismo pero sí es muy posible que se envíe a quien previamente la envió, ya que los destinatarios ignoran quien les envía la carta que reciben. Creo que no hay que hacer más precisiones, el asunto es muy sencillo y pienso que se entenderá sin dificultad alguna,

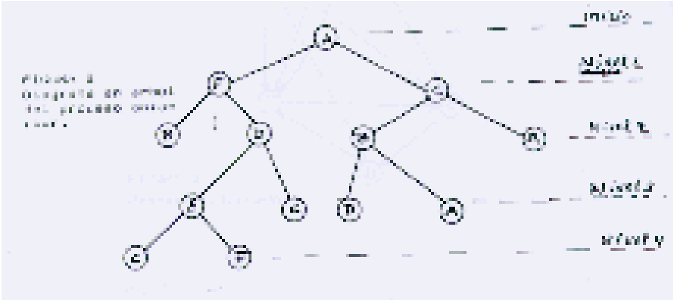
Como es natural el "juego' termina cuando TODOS los participantes, incluido el que lo inició, han recibido al menos una carta, y por tanto TODOS han enviado DOS cartas.

El siguiente esquema indica cómo sería un juego terminado felizmente entre los seis amigos.



El proceso comienza con A siendo siendo E el último en recibir carta al proceso. En realidad E envía sus cartas ya inútiles pero no puede saberlo. Al final todos han enviado dos cartas, y han recibido una al menos. Algunos ha recibido más de una carta. El proceso en forma de grafo resulta quizá poco claro y es interesante expresarlo en forma de árbol para que se vea como se desarrolló cada una de las fases (figura 2).

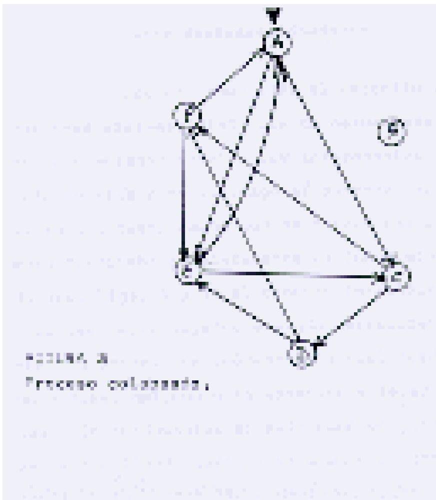
En nuestro ejemplo el proceso se terminó en tres fases aunque existe un inútil cuarto nivel. Como podemos ver al elegir cada cual al puro azar sus destinatarios se dan repeticiones.



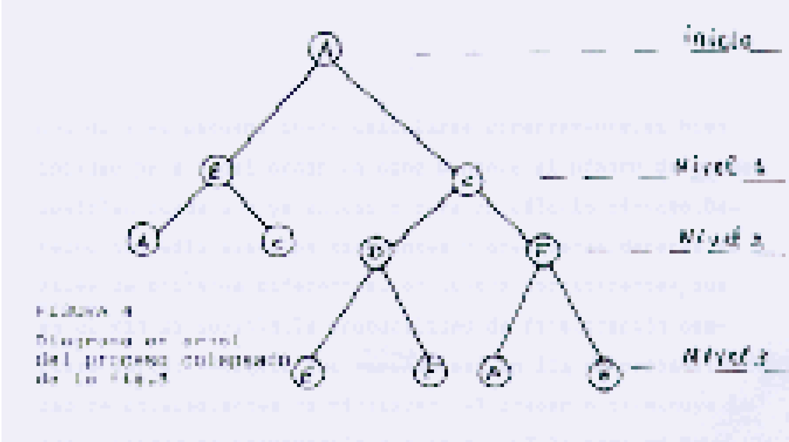
Un mismo participante puede recibir varias cartas, incluso en el curso de la misma fase del proceso. Como nadie sabe quién es el remitente de la carta que recibe, bien puede suceder que él envíe la suya a aquél. En fin pueden darse toda suerte de situaciones que el lector puede imaginar.

Naturalmente la situación más curiosa es la de "bloqueo" o colapso del proceso. Para que el "juego" continúe en cada fase (si no se finaliza, claro) es preciso que el menos uno de los destinatarios de cartas en dicha fase sea "nuevo", esto es que no hubiese recibido ni enviado cartas en fases anteriores. Si no se da el caso el proceso se bloquea al no haber nadie que lo continúe enviando cartas.

En el siguiente esquema puede verse un proceso de seis personas colapsado antes de que todos hayan recibido su carta y enviado las suyas. También damos el proceso en forma arborescente para ver cómo se desarrolla por fases (figuras 3 y 4).



Como se puede apreciar en dichos esquemas, el proceso se detiene en el nivel 3, por lo que no hay cuarta fase debido a que en el paso del 2º al 3º nivel los cuatro que salen (A, F, A, E) ya habían "salido" en niveles anteriores y enviado sus respectivas misivas por lo que ahora no lo hacen, colapsándose el proceso sin terminar al faltar B, que se queda sin recibir la oración a Santa Rosa, con grave riesgo quizás para su salud espiritual. El azar es el azar.



Los procesos como el descrito pueden ser considerados como sistemas dinámicos de naturaleza estocástica o aleatoria, presentando facetas muy interesantes cuyo análisis se saldría de este contexto. Algo sí podemos decir no obstante. Hemos visto dos casos, ambos con n= 6 personas participantes; el primero terminaba completamente el juego, mientras que en el segundo caso (figs. 3 y 4) el proceso terminaba en colapso sin finalizar, es decir dejando a algún participante fuera. Es evidente que "a priori" es impredecible cuál pueda ser el resultado de un proceso tal, que está sometido a leyes probabilísticas. La cuestión fundamental es así: *dado un juego o proceso como el de la oración de Santa Rosita de Lima, con n participantes, ¿cuál es la probabilidad de terminación completa, o de colapso?*

Cuando n es pequeño puede calcularse directamente, si bien incluso para n del orden de ocho o nueve el número de casos posibles puede ser ya excesivo para un cálculo directo. De hecho con sólo siete participantes pueden darse decenas de miles de procesos diferentes. Con cuatro participantes, que es el mínimo posible, la probabilidad de finalización completa es del 85,1 %, lo que indica casi un 15 % de probabilidad de colapso antes de finalizar, Al crecer n disminuye la probabilidad de terminación que es del 67,8% para n = 5; y del 60,1 % para n = 6, lo que supone que en este último caso ya un 40 % de los procesos terminarían en colapso, sin haber aparecido todos los participantes. ¿Qué ocurrirá con valores de n elevados como sería en la realidad ?

Ningún proceso terminará completamente antes de un número de pasos o niveles P tal que $2^{p+1} \geq n+1$. Es fácil comprender que ningún proceso se prolongará más allá de un número de pasos o niveles igual a n-1. Pero puede colapsarse en cualquier momento a partir del segundo nivel.

****

Analizar la expansión y desarrollo de la devoción a Santa Rosita puede ser más difícil de lo que sus entusiastas creen, e incluso tornarse intratable pese a disponer de ordenadores, para n muy elevados. Lo mejor es diseñar lo que suele denominarse un "modelo de simulación" que sea manejable. Puede comprobarse que para valores de n muy elevados (al menos n = 10.000) tiende a adoptar lo que técnicamente se denomina un comportamiento "asintótico", que puede representarse bien por la ecuación recurrente:

$$X_t = 2\left[1 - \frac{A_{t-1}}{n}\right]X_{t-1}$$

Donde X_t es el número de personas nuevas en el paso o nivel t reciben carta por primera vez, y A_{t-1} el número de personas que hasta el momento $t-1$ han recibido la orden de rezar.

Lo más curioso es que el proceso de Santa Rosita tiende a adoptar un comportamiento casi independiente del número de personas que tomen parte (n). Desde luego la probabilidad de colapso crece con n, de tal suerte que para valores de este parámetro con sólo tres cifras ya es muy escasa la probabilidad de que todos los participantes reciban carta. Pero lo extraño es que siempre parece detenerse cuando e! numero de personas que han recibido la misiva se acerca al 86,87 % del total, u que supone que un 13,13 % aproximadamente está de antemano condenado a no recibir los beneficios espirituales del caso. Sería por cierto muy interesante que alguien averiguara el significado —si es que tienen significado— de números como 0.868709... ó 0.131291..., que determinan los límites de expansión del mensaje independientemente de n.

Curiosamente si en vez de dos cartas cada participante enviase tres parece que la feliz terminación completa del proceso —y la extensión de la devoción al cien por cien de la población— quedarían casi garantizadas, pero con dos no. El crecimiento por duplicación aleatoria tiene al parecer límites muy precisos, resultado que como se comprende tiene una importancia que trasciende con mucho de la anécdota de este artículo. Sin duda la GENTE DE MENTE sacará consecuencias por su cuenta.

LOS NÚMEROS RAMANÚJICOS

Hay una anécdota muy conocida del gran matemático indio Srivasa Ramanujan. Hallándose internado en un hospital londinense recibió la visita de un amigo suyo, quien, conocedor de las instantáneas relaciones mentales que Ramanujan establecía ente los números, le comentó:

—Pues el taxi en que he venido tenía un número bien intrascendente: 1729.

—De ningún modo —contestó Ramanujan. Es el primer número que es dos veces suma de dos cubos.

En efecto, dicho número cumple:

$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$

Llamaremos números ramanújicos a los que cumplen con la propiedad de ser varias veces suma de dos potencias del mismo exponente (según el número de veces en que pueden expresarse como suma de dos potencias, serán bi-ramanújicos, tri-ramanújicos, etc.). Limitándonos de momento a los cuadrados, los mono-ramanújicos abundan bastante (alrededor de un 10 % del total). De hecho, es conocido el teorema que afirma que cualquier número entero es suma de cuatro cuadrados como máximo.

El número bi-ramanújico más bajo de orden 2 es:

$50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$

Pero existen también tri-ramanújicos. El más bajo es 325:

$325 = 18^2 + 1^2 = 17^2 + 5^2 = 15^2 + 10^2$

Más espaciadamente van apareciendotetra, pent-, hexa-ramanújicos, etc., con una densidad progresivamente decreciente, que recuerda la de los primos:

$1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$

$8125 = 90^2 + 5^2 = 86^2 + 27^2 = 85^2 + 30^2 = 50^2 + 75^2 = 69^2 + 58^2$

$5525 = 74^2 + 7^2 = 73^2 + 14^2 = 71^2 + 22^2 = 70^2 + 25^2 = 62^2 + 41^2 = 55^2 + 50^2$

Obsérvese un hecho curioso: el primer número hexa-ramanújico es incluso inferior al primer penta-ramanújico.

Pasando a los ramanújicos cúbicos, el primero es, efectivamente, 1719. El siguiente:

$4104 = 23^3 + 16^3 = 15^3 + 9^3$

El primer tri-ramanújico cúbico es

$39312= 34^3 + 2^3 = 33^3 + 15^3 = 34^3 + 2^3$

Y así sucesivamente. Pueden hacerse otras investigaciones similares más o menos caprichosas, como por ejemplo hallar números que sean varias veces suma de un cuadrado y un cubo. El más notable entre los bajos es 1025:

$1025 = 32^2 + 1^3 = 31^2 + 4^3 = 30^2 + 5^3 = 10^2 + 5^3$

Sólo desde hace poco tiempo se sabe con certeza que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no es resoluble para $n > 2$. Pero sí lo es la similar $x^n + y^n + z^n = u^n$, que tiene como primera solución para $n=3$:

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

Por cierto, que la similitud de esta igualdad con la conocida $3^2 + 4^2 = 5^2$ dio pie a todo tipo de investigaciones en esa dirección. La primera, claro, comprobar la análoga con cuartas potencias, que (¡lástima!) ya no se cumple.

Propongo una serie de generalizaciones al concepto:

- Estudiar los ramanújicos de orden 3, 4, etc.
- Estudiar los ramanújicos de orden 2 que a su vez sean cuadrados perfectos.

JMAiO