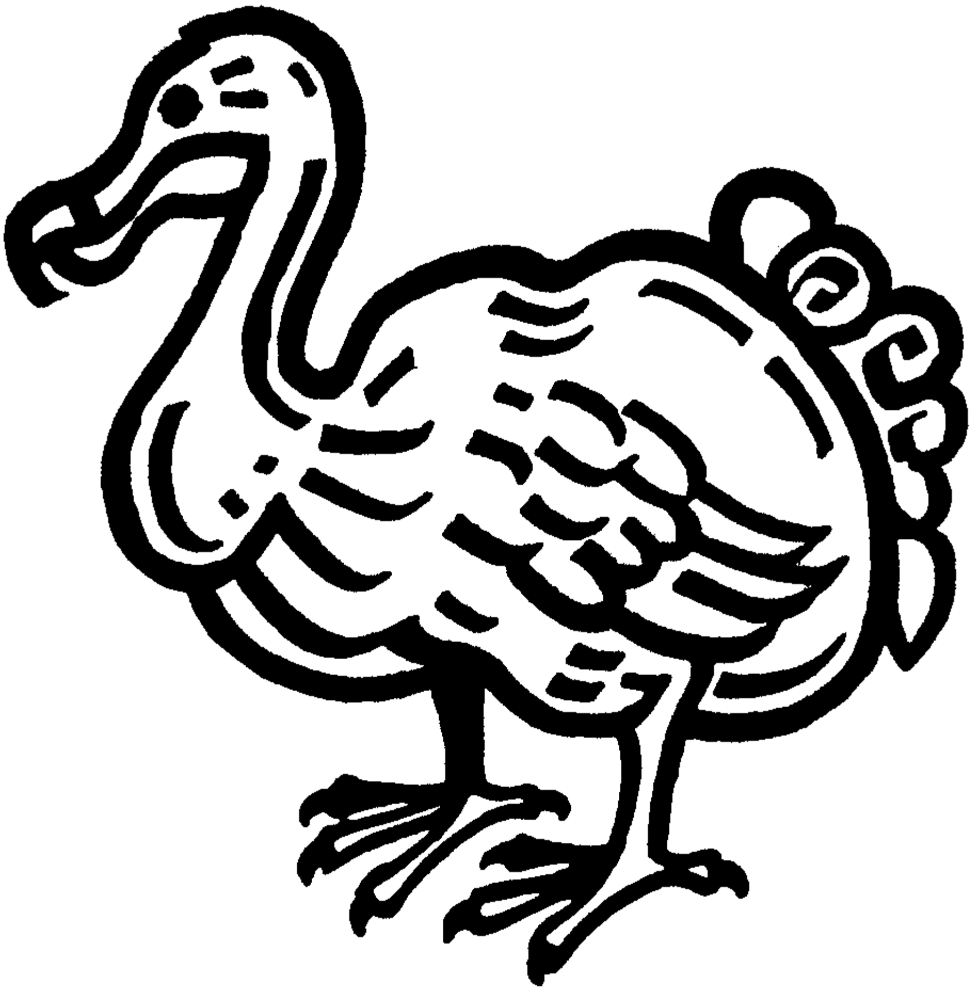
Mensa España



DODO

Carrollia, último número de 1....
Diciembre 1999, nº 63

CARROLLIA

Dirección en la web: **www.ciudadfutura.com/juegosmensa/carrollia.html**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès	**Francesc Castanyer**
e-mail: jalbaiges@caminos.recol.es	

El vencimiento de la subscripción corriente se indica en la etiqueta postal. Los que la hayan excedido razonablemente pasarán a la categoría carrolliana de “ Sonrisa de gato de Cheshire” (esto es, de recuerdo...).

SUMARIO

2000, AÑO DEL DODO

¿Será por el parecido del nombre con la cifra? El caso es que me ha parecido oportuno dedicar este año (¿último del XX, primero del XXI?; basta, basta, por piedad) a nuestro simpático pajarraco, que con su extinción alcanzó a la vez la inmortalidad de la mano de la novela de LC. Puede ser éste un buen presagio para esa humanidad enloquecida en las postrimerías del siglo (ved BOFCI), que quizás encuentre su camino de la mano del amor... hacia los niños y los pájaros.

El dodo (a veces escrito dodó), representaba en *Alice in Wonderland* al propio Carroll, que a veces tartamudeaba al pronunciar su propio nombre, Do-Do-Dodgson. El ave habitaba hasta el siglo XVIII en las islas Mauricio, Reunión y Rodríguez, pero se extinguió rápidamente en cuanto los navegantes que paraban en ellas en busca de víveres descubrieron lo fácil que era cazarla. En el museo de ciencias naturales de Oxford se conservan los últimos restos del animal, que no dejaría de ver LC en sus visitas.

JMAiO

63

Los antiguos atribuían una especial significación de los años múltiplos de 7 ó 9, a los que llamaban “ climatéricos” . Entre ellos ocupaba un lugar destacado el 63, múltiplo de ambos.

En efecto, 7 y 9 son los primeros números geométricamente rebeldes, ya que los polígonos de 7 y 9 lados son los primeros que no es posible construir con regla y compás. 63 posee otras significaciones místicas: es la distancia de la Tierra a la Luna, medida en radios terrestres. También es familiar a los niños: es el número de casillas en el juego de la Oca. En loterías es denominado, ignoro, por qué motivos, “ el arroz” , “ la paella” y “ el farolito” .

El algoritmo de Kaprekar consiste en invertir un número, hallar la diferencia entre ambos y reiterar el proceso. Aplicado a los de 2 dígitos, acaba conduciendo al ciclo 63-27-45-9-81-63... (9 debe ser leído como el número de 2 dígitos 09).

Y ahí va otro simbolismo algo abstruso: existen 63 tipos de pavimentaciones normales isoédricas del plano con ayuda respecto a los dominios convexos (una pavimentación T_i es isoédrica si su grupo de simetrías se mueve transitivamente sobre los dominios T_i).

Última carta del milenio

¿Dónde vais a pasar el cotillón de fin de año? La locura se ha desatado. En algunas revistas se habla de 500.000 Pta (3000 euros) por pasar la noche de fin de año, algunos van a alquilar la torre Eiffel para un party de 40 personas por 200.000 euros, otros más se entretendrán cruzando en barco la línea del cambio de fecha para vivir dos veces el momento de cambio de año (el crucero costará sólo 100.000 euros). Estábamos cansados de ver cómo se hacen tonterías que atribuíamos al fanatismo religioso o político, cuando no a la mera ignorancia. Y he aquí que un instante arbitrario de la órbita terrestre provoca esos delirios. En fin, podéis leer, si os atrevéis, el BOFCI, pero advierto que este mes viene con varios rombos.

Así que pasemos a lo nuestro. En [C-61] M. A. Lerma indicaba una manera "fácil" de nombrar los números para que fueran fácilmente agrupables alfabéticamente. Simplificando, sería:

1=a
2=aa
3=aaa
etc.

Claro es que la ordenación coincide con el orden numérico.

Efectuemos algunas ligeras variaciones. Por ejemplo, según que el número sea par o impar, su nombre varía ligeramente:

1=a
2=ab
3=aa
4=aab
5=aaa
6=aaab
etc.

En este caso, el orden alfabético sería:

a
aa
aaa
….. (infinitos números)
aaab
aab
ab

Es decir, avanzaría hacia el infinito por los números impares, y "regresaría" por los pares. ¡La sucesión tiene primer y último término! También, segundo, antepenúltimo, etc…. pero los números impares no tienen un lugar numerable en la sucesión.

Otras combinaciones, que el lector puede crear fácilmente son por ejemplo: a, ab, ac, aa, aab, aac, aaa, aaab, aaac,… En cada caso se obtienen singulares saltos e irregularidades en la ordenación.

Y ahora otra pregunta: ¿Cómo sería la ordenación alfabética de los números romanos? Nos limitaremos a los no mayores de 3888, máximo valor que se puede alcanzar sin recurrir a suprarrayados. El orden es ahora ciertamente chocante:

C
CC
CCC
CD
CDI
CDII
CDIII
CDIV
CDL
CDLI
etc.

Como el repertorio es ahora finito, claro es que todos los números tendrán su lugar de orden en la sucesión. Y otra pregunta más: ¿habrá alguno cuyo lugar de orden coincida con el mismo número?

Pasemos a las noticias el Cono Sur. En las "cercanías" del glaciar Perito Moreno (en América, ni 20 años ni 400 km son nada), Ricardo Isaguirre nos trae sus siempre interesantes noticias patagónicas.

Yo lamento no tener una máquina más civilizada para escribirte, pero ya te he contado como son las cosas aquí. Si por mí fuera, no me negaría a los correos electrónicos y esas yerbas, que decimos en Buenos Aires, pero por ahora hay que conformarse con lo que hay.

Quiera Dios que pronto estés en condiciones de viajar a la Argentina como lo planeaste un día y no pudiste llevarlo a cabo. En otras ya tendremos tiempo de escribir algo acerca de los estereotipos que vosotros los europeos (aun los españoles, tan cercanos a nosotros) debéis hacer a un lado para captar lo que este pueblo (en formación) sea.

La frase "esas yerbas" no es exclusiva de Argentina. En España se decía, abreviadamente, "y otras hierbas" como un sustituto popular de "etcétera", aunque nunca oí hablar de "esas" hierbas. Es curioso, de todos modos, que la frase española no la he oído desde hace al menos veinte años. Supongo que aquí está en regresión.

Pero lo que no retrocede es el interés de España por Argentina, acrecentado en esos últimos veinte años por las circunstancia políticas, que propiciaron la llegada de muchos fugitivos, la mayoría de los cuales se han establecido con sus familias en la Madre Patria. Prosigue así un trasiego, en uno u otro sentido, que no ha cesado desde hace quinientos años (en 1939 fue a la inversa).

Mariano Nieto, el protagonista del [B-23], manda una de sus crónicas viajeras:

Regresando de un reciente viaje a los EE.UU. (Filadelfia y Washington) me encuentro con Carrollia y el BOFCI, este último me ha sorprendido pues, aunque sabía que ibas a publicar algo sobre coincidencias, no imaginaba que estaría compuesto en exclusiva por mi escrito. La portada de los túneles pone en evidencia la importancia de las coincidencias... en las obras públicas y en la minería [Mariano es ingeniero de minas]. Gracias por tu amable prólogo.

El próximo día 23 de octubre esperarnos estar en Barcelona para asistir en el nuevo **Liceo** a la representación de **Turandot.** Aunque no soy aficionado a la ópera, a Mamen le apetece ver de nuevo el teatro restaurado.

Nuestro viaje a los EE.UU. aunque corto fue muy agradable. Alquilamos un coche en el aeropuerto de **Newark** (donde me sorprendió ver que todas las indicaciones, además de en inglés, estaban en castellano) con el que viajamos por la carretera interestatal n^{o} 95 y por la n^{o} 1; es impresionante el tráfico por esas autopistas que, en algunos tramos, llegan a tener hasta 6 carriles por sentido y los seis van repletos de automóviles. El negocio de alquiler de coches debe ser muy floreciente allí pues hay un montón de compañías y todas disponen de amplísimas áreas de aparcamiento en los aeropuertos. No te comento nada de Washington que es una preciosa ciudad, ni de la **Smithsonian** cuyo admirable museo de la aeronáutica y del espacio estuvimos visitando durante una tarde; podrías pasar allí una semana entera viendo cosas interesantes. No sé si conoces **Filadelfia,** es una ciudad muy simpática llena de recuerdos de la independencia. Las calles de este a oeste van numeradas, pero de norte a sur-llevan nombres, muchos de ellos de árboles; nos alojamos en el hotel “The Warwiek" en la calle Locust es decir M algarrobo. Son impresionantes los rascacielos del "downtown" rodeando al emblemático edificio del ayuntamiento con su torre que, en su día, pretendió ser las más alta del mundo, coronada por la estatua de 11 metros de **W. Penn,** fundador de la ciudad. Desde arriba a 168 m de altura, hay unas magníficas vistas de la cuadrícula de calles y de la inmensa planicie boscosa de Pennsylvania.

Quise ver las novedades en libros de matemática recreativa y recorrí algunas librerías que me dejaron admirado por su tamaño; concretamente en **Princeton** entramos en una de la cadena **Barnes & Noble** que, aunque vende el 70% a través de Internet, tiene unas grandes superficies de venta, con cafetería incluida. Me hubiese comprado un montón de títulos interesantes, pero mirando al bolsillo y reprimiendo severamente mis impulsos, sólo adquirí los títulos que te reseño para que Francesc los incluya en su base de datos:

Mathematical Baffiers de Angela Dunn. Dover.
Lateral Logic Puzzles de Erwin Brecher. Sterling Publishing.
Entertaining Mathematical Puzzles de Martin Gardner. Dover.
Einstein for Beginners de J. Schwartz. Pantheon Books.

Ya sabes que me encantan los problemillas de probabilidades. En hoja aparte, como colaboración para [C] te mando un par de ellos precisamente tomados del libro de **Angela Dunn.** No he logrado hincar el diente al de la variante de la construcción del triángulo; requiere cálculo integral y logaritmos neperianos. A ver si tú o algún otro carrollista expone razonadamente la solución.

En otra carta Mariano se refería a una costumbre que por lo visto estuvo en boga hace un tiempo en algunas comunidades cristianas, consistente en abrir la Biblia al azar tratando de encajar lo que sale con la propia situación. En realidad esa práctica de abrir la Biblia al es muy antigua. La mención primera es de san Agustín, quien hallándose descansando bajo una higuera, escuchó la voz de un niño que decía “*Tolle lege, tolle, lege*” (toma, lee). Abriéndola al azar por Romanos 13,13-14 halló ese mismo pasaje, que transformó su vida.

Otra forma de buscar consejo aleatorio, muy parecida a nuestra práctica de las cabañuelas, era leer uno de los 31 versículos del cap. 11 de Proverbios, el del día en que uno ha nacido, y considerarlo un augurio.

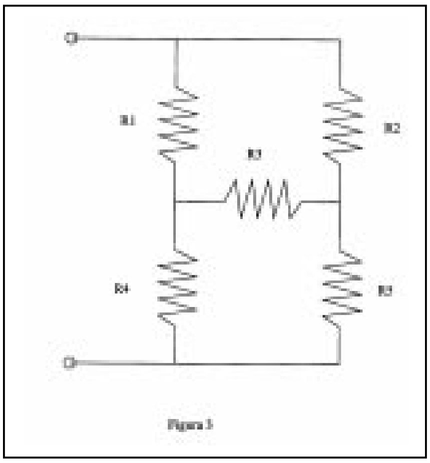
Mariano mandaba también unas curiosas expresiones algebraicas formadas por radicales enmarañados (lamento no encontrar su carta en este momento) El enmarañamiento de expresiones cuadráticas es fácil de hacer, difícil de deshacer. Veamos un par de ejemplos del arte de complicarse la vida:

$$a = a - \sqrt{b} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(a - \sqrt{b}\right)^2} + \sqrt{b} = \sqrt{a^2 + b - 2a\sqrt{b}} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Por supuesto, podríamos reiterar el procedimiento a las expresiones de la derecha. Por ello, si las recibimos como punto de partida, hay que hacer bastantes suposiciones y pruebas para deshacer el cambio.

Lo curioso es que sí debe existir algún procedimientos sistemático, pues el programa **Derive** que me cediste lo hace sin mayores dificultades.

Y va ahora una de electrotecnia, que se me ocurrió un día en el correspondiente laboratorio. Como es sabido, la resistencia equivalente a dos resistencias en serie es su suma, o sea $R_e = R_1 + R_2$. Si están el paralelo se suman las conductancias, $1/R_e = 1/R_1 + 1/R_2$. Utilizando más resistencias y combinando serie y paralelo puede obtenerse una gama amplia de valores para R_e.



Supongamos ahora que sólo tenemos resistencias de un ohmio, y queremos conseguir formar con ellas una resistencia de un valor R_e dado (racional). En principio no tiene dificultad el problema, pues para formar, por ejemplo, una de 0,6 ohmios bastará con tomar tres grupos seguidos de 5 resistencias en paralelo (cada grupo vale 0,2 ohmios).

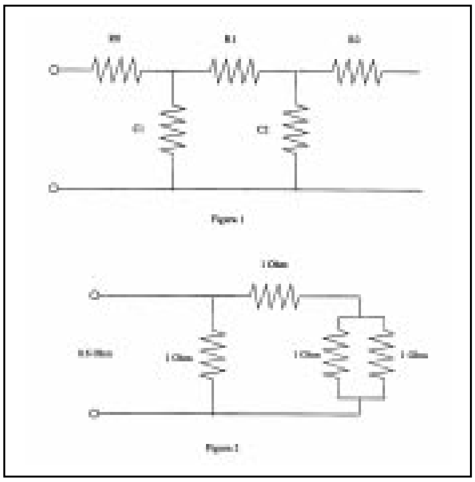
Salta a la vista que este procedimiento es muy poco económico, pues necesitaremos 15 resistencias. Sería más fácil disponer dos en paralelo, poner el grupo en serie con otra y poner finalmente todo el conjunto en paralelo con otra más. Así, 4 resistencias serían suficientes.

Y ahora viene la pregunta: ¿Existe algún procedimiento para hallar el grupo más económico?

Sometido el problema a M. A. Lerma, actualmente en Chicago, pronto recibí una exhaustiva y rápida solución, que seguidamente se expone. Por cierto, Miguel Ángel mandó su foto, que publico. Buena costumbre, que me gustaría que cundiera entre los carrollistas: sería una forma de conocernos un poco más.

El problema de cómo conseguir resistencias fraccionarias combinando resistencias de 1 Ω se puede resolver de forma bastante eficiente usando fracciones continuas. En general, la resistencia del circuito en forma de escalera mostrado en la figura 1, donde R_0, R_1, R_2 representan resistencias y C_1, C_2 representan conductancias, es igual al valor de la fracción continua:

$$[R_0, C_1, R_1, C_2, R_2 \ldots] = R_0 + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{C_2 + \cfrac{1}{R_2 + \ldots}}}}$$



El número total de resistencias de 1 Ω necesarias es $R_0 + C_1 + R_1 + C_2 + R_2 + \ldots$ La solución es, pues, escribir el valor de la resistencia deseada en forma de fracción continua, y usar los términos alternativamente como resistencias y conductancias en una red de resistencias como la de la figura 1. Por ejemplo, 0.6 = [0,1,1,2] Ω se pueden obtener con el esquema de la figura 2.

A pesar de proporcionar una buena solución, el circuito en escalera no es siempre óptimo. Por ejemplo, 5/6 Ω se obtendrían por este sistema poniendo una resistencia en paralelo con cinco resistencias colocadas en serie (1/(1+1/5) = 5/6), pero también se obtiene la misma resistencia total poniendo en serie dos conjuntos de dos y tres resistencias colocadas en paralelo respectivamente (1/2+1/3 = 5/6). No sé si se conocerá la solución óptima del problema. Aunque se dispusiera de un algoritmo óptimo para circuitos obtenidos a base de combinar subcircuitos en serie o paralelo, aún quedaría comparar los resultados con circuitos más complejos, como el de la figura 3, que no se puedan descomponer en subcircuitos unidos en serie o paralelo (la resistencia total en este caso sólo se puede obtener mediante las leyes de Kirchhoff).

Muchas gracias, Miguel Ángel. Veo que el problema es ciertamente complejo, y no voy a insistir más en él.

Y llega otra comunicación de Alfredo Quesada, de Grado (Asturias):

¿Por qué las versiones electrónica y sobre papel de [C] difieren?

Las diferencias entre la versión en papel y en la web se deben a tres causas: por una parte, no siempre algunos artículos mandados por colaboradores se pueden poner electrónicamente, a menos que se copien, lo que exige un tiempo del que no siempre dispongo. En la revista se fotocopia en esos casos el original en el que me lo remiten sus autores. Además la revista en papel no da abasto a la producción, y mucho material no cabe literalmente, por lo que se pospone (quizá *sine die*) su aparición en ella. Por último, se suprimen muchos gráficos de la versión web para no hacer su transmisión interminable.

Y, tras una sección algo más corta de lo habitual, motivada por mi deseo de que este número no entre en el maremágnum postal navideño, me despido de vosotros hasta el 2000.

¡Felices fiestas!

JMAiO

ALBARDA SOBRE ALBARDA

Varios lectores me han hecho notar un cúmulo de errores deslizados en [C-62]. En la página 10, el cuadrado mágico no suma siempre 62. El superior derecho suma 52, pero ello es debido a que el número en el ángulo superior derecho debe ser el 19 y no el 9.

En la página 21, el ejemplo de la función reflex está mal calculado. El tercer párrafo debe ser el siguiente:

- Expresándolo en base 6: $45 = 113_{(6)}$
- Reflejado: $311_{(6)}$
- Deshaciendo el cambio de base: $311_{(6)} = 115$

En cuanto al tercer párrafo de la página 23, debe ser:

- Si entonces uno de estos hijos varón se casa con una EGFH (padres respectivos EF i GH), el resultado será un AECGBFDH.

Mis disculpas a todos. En el próximo milenio lo haré mejor.

JMAiO

1234567890

Hacer monerías con los nueve dígitos (diez, si incluimos el cero) ha sido siempre una constante en la matemática recreativa. Por ejemplo, son bien conocidas las igualdades:

$$12345679 \times 9 = 111.111.111$$
$$12345679 \times 18 = 222.222.222$$
$$12345679 \times 27 = 333.333.333$$
$$12345679 \times 36 = 444.444.444$$
$$12345679 \times 45 = 555.555.555$$
$$12345679 \times 54 = 666.666.666$$
$$12345679 \times 63 = 777.777.777$$
$$12345679 \times 72 = 888.888.888$$
$$12345679 \times 81 = 999.999.999$$

Todas ellas, derivan del hecho de que obviamente 111.111.111 es múltiplo de 9. El resultado de esta división es 12345679, cociente en que falta el 8. Si lo incluimos, sale otra notable igualdad:

$$123.456.789 \times 9 + 9 = 987.654.321$$

Por cierto, de esta última igualdad deriva la división “casi” exacta:

$$\frac{987654321}{123456789} = 8{,}000000079\ldots$$

Es casi ocioso advertir que igualdades similares se darán con cualquier base de numeración.

Martin Gardner define los "conjuntos autoduplicadores" como aquellos subgrupos de los nueve dígitos susceptibles de formar números relacionados entre sí mediante las operaciones de suma y resta:

123456789 + 987654321 = 864197532

0123456789 + 9753086421 = 9876543210

01245789 + 98754210 = 97508421

459 + 495 = 954

Merece ser aquí incluido un comentario sobre ciertos números primos. Los formados por dígitos en orden cíclico descendente y consecutivo son escasos: 19, 43, 1987, 76.543, el mayor hasta ahora (con el 0, están 109 y 10.987). En cuanto a los ascendentes, empezando por 23 se conocen diecinueve, pasando por 23.456.789 y 1.234.567.891, hasta llegar al asombroso 1.234.567.891.234.567.891.234.567.891 (descubierto por Raphael Finkelstein & Judy Leybourn en la Universidad de Bowling Green en 1972).

Jaime Poniachik, creador de la revista argentina *Snark* y más tarde colaborador en *Humor y Juegos*, propone el siguiente problema, resuelto por su esposa, Lea Gorodsky: formar con los nueve dígitos un número de nueve cifras, de forma que el subnúmero formado por las dos primeras sea divisible por 2, el de las tres primeras por 3, etc. La solución es 381654729. Observemos el parentesco de este valor con la forma en que se disponen las cifras del cuadrado mágico de tercer orden:

8 1 6
3 5 7
4 9 2

Más cosas: los números 57.321 y 60.984 contienen, juntos, los diez dígitos. Sus respectivos cuadrados, 3.285.697.041 y 3.719.048.256 también contienen, cada uno, los diez dígitos.

Otras parejas con la misma propiedad: 35.172 y 60.984; 58.413 y 96702; 59.403 y 76.182.

Un problema clásico: intercalar entre los nueve dígitos, colocados en forma ascendente o descendente, los signos aritméticos habituales para conseguir un valor determinado. Para 100 existen las siguientes soluciones:

Orden directo:

123-45-67+89 = 100
123+4-5+67-89 = 100
123+45-67+8-9 = 100
123-4-5-6-7-8-9 = 100
12-3-4+5-6+7+89 = 100
12+3+4+5-6-7+89 = 100
1+23-4+5+6+78-9 = 100
1+2+34-5+67+8+9 = 100
12+3-4+5+67+8+9 = 100
1+23-4+56+7+8+9 = 100
1+2+3-4+5+6+78+9 = 100

Orden inverso:

98-76+54+3+21 = 100
9-8+76+54-32+1 = 100
98-7-6-5-4+3+21 = 100
9-8+7+65-4+32-1 = 100
9-8+76-5+4+3+21 = 100
98-7+6+5+4-3-2-1 = 100
98+7-6+5-4+3-2-1 = 100
98+7+6-5-4-3+2-1 = 100
98+7-6+5-4-3+2+1 = 100
98-7+6+5-4+3-2+1 = 100
98-7+6-5+4+3+2-1 = 100
98+7-6-5+4+3-2+1 = 100
98-7-6+5+4+3+2+1 = 100
9+8+76+5+4-3+2-1 = 100
9+8+76+5-4+3+2+1 = 100

En realidad, con un programa informático puede obtenerse prácticamente cualquier número. Añadamos, como curiosidad, que si se permite añadir un signo ante el primer dígito el conjunto de soluciones se amplía:

-1+2-3+4+5+6+78+9 = 100
-9+8+76+5-4+3+21 = 100
-9+8+7+65-4+32+1 = 100
-9-8+76-5+43+2+1 = 100

Josep M. Albaigès
Salou, sep 99

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera trasparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti, *Poemas del destierro*

CURIOSIDADES DEL NÚMERO π

Martin Gardner hace notar en varios artículos algunas cosas notables en la estructura numérica del número π:

π = 3,14159265358979323846264338327950…

Se observa, subrayada, la secuencia 79-32-38, que aparece en orden inverso más adelante: 38-32-79. En medio está un 26, y otro 26 antes, entre dos secuencias de cinco dígitos.

Los dígitos del primer conjunto de estos cinco dígitos suman 20, cifra igual al número de decimales que preceden al segundo 26. El segundo conjunto de cinco dígitos suma 30, igual al número de decimales que preceden el final del segundo período. Juntos suman 50, el número de dos dígitos que viene a continuación. La mencionada serie 79-32-38 se inicia en el decimotercer decimal, y 13 es la mitad de 26.

Los dígitos de los tres pares 79-32-38 suman 32, o sea el par del centro y el número total de decimales incluidos. El 46 y el 43 a cada lado del segundo 26 suman 89, valor igual al par que precede el primer grupo.

Más curiosidades: los decimales de pi, del 60º al 69º, son 4592307816, la primera serie de diez dígitos consecutivos en la cual no se repiten los dígitos. Por un pelo no alternan pares e impares (la probabilidad de que una secuencia cumpla con esta condición es solamente $10!/10^{10} = 0,00036288$). Los decimales 1960 a 1969 son 5739624138, casi otra secuencia de diez valores distintos, salvo el 3 repetido y sin cero. Los decimales 70 al 79 son 4062862089, obsérvese la extraña repetición de los cuatro dígitos en los dos cuartetos centrales adyacentes (0628 y 6208), y que todos los dígitos menos el último son pares.

Josep M. Albaigès, sep 99

CURIOSIDADES NUMÉRICAS DE LA BIBLIA

La Biblia contiene infinidad de números, cuya interpretación mística ha dado lugar a innumerables volúmenes. Menos conocidas son otras alusiones matemáticas, como las que siguen:

En vez de contar, como ahora, mis pasos (Job, 14,16)...
Enséñanos a computar nuestros días (Sal. 90,12).
Y de vosotros hasta los cabellos de la cabeza están todos contados (Mt. 10,30).
Comenzaron los hombres a multiplicar (Gén 6,1)
Siguieron multiplicando en el NT (II Pe 1,3; II Cor 9,10).
Realizaban divisiones (Gén 15,10; Núm 31,27)
Sumas (II Pe 1,5)
Restas (Gén 18,28)
Aprendieron a “sacar raíces” (Ez 17,9)
Y a luchar “contra las potencias” (Ef 6,12).
En varias ocasiones se habla de matrices (Ex 13,12,15; 34,19; Núm 3,12; 18,15)
Ezequiel decía que los “aros” infundían “temor” (Ez 1,18).
Jeremías lamentaba las “abominaciones” en “los campos” (Jer 13,27).
A Pedro lo molestaron “cuatro cuaternios” (Ac 12,4)
Jesús pensaba mal de quien “reclama signo” (Mt 16,4).

Otras curiosidades extremales, recogidas por Dmitri Borgmann, el primer especialista estadounidense en eulogología:

El versículo más corto de la Biblia: “Lloró Jesús” (Jn 11,35)
Íd. en el AT: “Eber, Peleg, Reú” (I Cr 1,25).
El más largo: Ester 8,9.
La palabra más larga de la Biblia: Majer-salal-jasbaz 816 letras), en Is 8,1.
El hombre más alto de la Biblia: no es Goliat (seis codos y un palmo, I Sam 17,4), porque se dice que Og, rey de Basán, dormía en una cama de nueve codos de largo (Dt 3,11)
El hombre de menor estatura no es Bildad el sujita, amigo de Job (Jb 8,1), sino Habacuc, quien dijo: “Sobre mi puesto me colocaré” (Hab 2,1).

En el AT nueve salmos son acrósticos alfabéticos, así como los primeros cuatro poemas de los cinco que componen las *Lamentaciones* de Jeremías y el poema de *Proverbios* 31:10-31, que enumera las virtudes de la buena esposa.

JMAiO, Salou, set 99

CURSILERíAS IDIOMÁTICAS

¡Son tantas! Algunos pedantes, incrustados en la Administración, nos proveen de ellas en abundancia. Sólo a título de muestras, con el ruego de que no las extiendan y de que, a lo sumo, las utilicen para hacer chistes, porque el fundamento para hacer reír ya lo tienen, mencionamos unas cuantas, obtenidas de la selección hecha por Don Ricardo Senabre, y publicadas por el diario ABC: "diseño curricular", "segmento de ocio" (por recreo), "mapa de conceptos" (por esquema de una lección), "pruebas de papel y lápiz" (por evaluaciones o controles), "materiales curriculares", "espacio de optatividad", "contenidos actitudinales", “niveles de concreción”, “enseñanzas comprensivas”, "animadores docentes" (por profesores), "talleres" (por clases). Más aportaciones nos hace D. Francisco Soler Visiedo, de Murcia, en carta al director del diario *ABC*. Son del tenor siguiente: "equipo de trabajo unicelular" por alumno y, naturalmente, "equipo de trabajo multicelular", por alumnos. A las buenas notas van a llamarlas "avance cognitivo satisfactorio"; a la calificación, "baremación"; al dictado, "actividad gráfico-motriz"; a los errores, "disfunciones"; a la enseñanza, "propedéutica", nos aterra la posibilidad de una Dirección General de Propedéutica Pública, aunque todo es cuestión de acostumbrarse; un libro dejará de llamarse libro para convertirse en "material curricular"; una libreta, "cuaderno guía", menos mal, y un maestro será en el futuro, "ayudante técnico ESÓtico", o "animador docente", como hemos apuntado más arriba; las palabras serán "unidades léxicas"; a los patios de recreo se les conocerá con el nombre de "espacios lúdicos"; leer será "descodificar", y un simple programa se conocerá mejor como "contenidos procedimentales y actitudinales". Señores... ¡váyanse ustedes a hacer puñetas! Y no seguimos, porque acabamos de leer que a la asignatura de filosofía que se estudiará en cuarto de ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria, eso) la bautizan así: "contenidos de la vida moral y reflexión ética", y eso que nos estamos refiriendo únicamente al ámbito de la enseñanza. Porque si nos metemos en el de la sanidad pública es como para morirse, y "no está bien que dejemos mal" a la sanidad pública. De modo que no nos metamos, y permitamos a los cursis que continúen con sus cursilerías. Lo hemos dicho siempre: entre la grosería y la cursilada, nos quedamos con ésta. Aquélla es siempre desagradable, y con ésta, al menos, podemos pasar un rato divertido. A título de amonestación, saquémosles sólo una modesta tarjeta.

Juan Aroca Sanz: *Diccionario de atentados contra el idioma español.*

DOS APELLIDOS EN ESPAÑA: ¿POR QUÉ?

Javier G. Algarra se interesa por la costumbre española de imponer dos apellidos, casi única en el mundo, donde lo usual es un apellido tan sólo.

En realidad convendría aclarar algo previamente: todos tenemos tantos apellidos como queramos o recordemos: los que pertenecieron a nuestros antepasados, y la misma Ley reconoce este derecho como un patrimonio más del individuo. Incluso existen en genealogía unas reglas muy estrictas para llevarlos.

Por ejemplo, supongamos la ascendencia de un individuo hasta la cuarta generación:

A. Álvarez =B. Benítez C. Camúñez = D. Díez E. Estévez = F. Flórez G. González = H. Hernández

|　|　|　|

I .Álvarez Benítez = J. Camúñez Díez　K. Estévez Flórez = L. González Hernández

|　|

M. Álvarez Camúñez Benítez Díez = N. Estévez González Flórez Hernández

|

O. Álvarez Estévez Camúñez González Benítez Flórez Díez Hernández

En el detalle de los apellidos de cada persona de la descendencia se observa la forma de ordenar éstos por intercalación, según una regla que en cuanto hay unas cuantas generaciones, puede llegar a complicarse bastante.[1]

Entonces, ¿por qué usamos dos apellidos? Simplemente, porque la *Ley de Registro Civil* establece que *sólo se admitirán en este número para inscripción*, y confundimos el derecho a ser inscritos con el derecho a usarlos. Pregúntenselo si no a los vascos, que tienen a gala exhibir la lista completa de sus antecesores hasta tantas generaciones como sean capaces de recordar.

Modifiquemos pues la pregunta: *¿por qué en España se inscriben sólo dos apellidos*? La verdad es que a estas alturas es muy difícil averiguarlo. Las costumbres onomásticas españolas, en ningún modo uniformes, quedaron fijadas por ley en la reforma administrativa de Javier de Burgos de 1835, que estableció los dos apellidos de marras. ¿Por qué? Hay que suponer que en el proceso de redacción de la ley, algún funcionario emitiría un informe en que se recomendaba este uso (por otra parte de amplia tradición en España), y la ley se acomodó a él.

Esta costumbre es observada en muchos países hispanoamericanos, como Cuba. Otros dejan en libertad que sean uno o dos (Venezuela), y otros (México, Portugal) mantienen igualmente dos apellidos, pero en el estilo anglosajón; el principal (ordinariamente transmitido por vía paterna) es el segundo, no el primero.

[1] Véase el artículo *La función reflex*, publicado en [C-62].

Desde luego el doble apellido es una ventaja, porque evita confusiones, tanto más en un país de escasa variedad onomástica como España donde una docena de apellidos ocupan el 25 % del ranking total. Esta posibilidad de confusión la palian un tanto los anglosajones con el *middle name*, palabra que de hecho es un segundo nombre, pues puede aplicarse libremente, aunque en algunos lugares se toma como tal el apellido de la madre (este hábito no es ni mucho menos universal).

JMAiO, sep 99

EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO PROMEDIO

Las teorías sobre el "hombre promedio" del sabio belga Quetelet provocaron en su día fuertes debates. Entre las críticas más intensas, estaban las que le negaban "viabilidad biológica", alegando que esa abstracción en ningún caso representará un ser humano de carne y hueso, sino meramente una abstracción sobre la que era posible construir nada. "El hombre promedio no es hombre, de la misma manera que el triángulo promedio entre dos o más triángulos rectángulos no es rectángulo en general", decían los críticos.

Ese aspecto matemático ha llamado nuestra atención, conque hemos decidido comprobarlo.

Sea un triángulo rectángulo. Sin mengua d la generalidad, podemos suponer que su hipotenusa vale la unidad, con lo que sus catetos serán cos α y sen α. Vamos a promediarlo con otros dos triángulos, cuyos lados, también sin faltar a la generalidad, podemos suponer que valen k_1 (la hipotenusa), $k_1$cos ω_1, $k_1$sin ω_1 para el primero, y k_2, $k_2$cos ω_2, $k_2$sen ω_2 para el segundo. Para simplificar, tomaremos las suma de los lados en vez de su promedio, lo que tampoco resta generalidad. Desde luego se verificará:

$$(\cos\alpha + k_1\cos\omega_1 + k_2\cos\omega_2)^2 + (\operatorname{sen}\alpha + k_1\operatorname{sen}\omega_1 + k_2\operatorname{sen}\omega_2)^2 = (1 + k_1 + k_2)^2$$

Desarrollando la expresión y simplificando, se llega a:

$$k_1\cos(\alpha-\omega_1) + k_2\cos(\alpha-\omega_2) + k_1k_2\cos(\omega_1-\omega_2) = k_1 + k_2 + k_1k_2$$

Observemos que el primer sumando de la izquierda siempre será menor o igual que k_1, el segundo será menor o igual que k_2 y el tercero será menor o igual que k_1k_2. El único medio de que pueda cumplirse la igualdad es por tanto que:

$$\alpha = \omega_1 = \omega_2$$

O bien que:

$$\mathbf{k_1 = k_2 = 0}$$

El primer caso corresponde al hecho de que los tres triángulos son semejantes, y el segundo a que el segundo y el tercero sean de lados nulos.

Fácilmente se generalizaría este resultado para más sumandos, con lo que quedaría demostrado que la única posibilidad para que el triángulo suma de dos más triángulos sea rectángulo es (fuera del caso trivial en que todos menos uno sean nulos), que sean semejantes.

Por cierto, es interesante observar que en todos los casos se cumplirá que el miembro de la izquierda será menor que el de la derecha, lo que es tanto como decir que el "triángulo promedio" será siempre obtusángulo. Sin duda los detractores de la teoría de Quetelet hubieran ampliado sus conclusiones de haberse fijado en este detalle.

Josep M. Albaigès i Olivart
Barcelona, noviembre 1999

LAS OFERTAS ENOLÓGICAS DE MARKS & SPENCER

Hace pocos días fue inaugurada en Barcelona la segunda sucursal de los almacenes MARKS & SPENCER. En su sección de enología hallé esta oferta:

LLÉVESE 6 BOTELLAS DE VINO Y PAGUE 5.

A modo de aclaración se añadía:

La botella de obsequio será aquella cuyo precio más se aproxime al valor medio del conjunto.

Esto me sugirió inmediatamente una pregunta: ¿Cuál sería la estrategia a seguir para conseguir el descuento máximo? ¿Tiene este descuento un límite superior o inferior?

Se supone que existe un surtido indefinido de botellas a todos los precios posibles, desde un mínimo p_{min} a un máximo p_{max}.

SOLUCIÓN A LAS OFERTAS DE MARKS & SPENCER

El máximo valor del descuento se obtendrá cuando el promedio se aleje lo más posible de la botella más próxima a él. Cuando las seis botellas son del mismo valor, el descuento es δ = 1/6 = 16,67 %.

Si compramos tres botellas de un precio p_1 y otras tres de un precio mayor p_2, la media es obviamente $(p_1+p_2)/2$. La distancia de este valor tanto a la barata como a la cara es $(p_2-p_1)/2$. En este caso podría plantearse la duda de si la botella de obsequio es la barata o la cara, pero es fácil soslayar esta dificultad sustituyendo una de las botellas caras por una de un precio ligeramente inferior.

En definitiva, si los precios son (p_1, p_1, p_1, p_2, p_2, $p_2-\varepsilon$), el valor promedio es ahora:

$$\overline{p} = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{\varepsilon}{6}$$

Este valor está ligeramente más cerca de p_2 que de p_1, conque la botella regalo será la última de que hemos hablado, y el descuento es por tanto:

$$\delta = \frac{p_2 - \varepsilon}{6(p_1 + p_2) - \varepsilon}$$

Este valor tiene como límite superior $\delta_L = \dfrac{p_{max}}{6(p_{min} + p_{max})}$.

Por ejemplo: si el precio mínimo es 500 Pta/botella y el máximo 1000 Pta/botella, la estrategia a seguir consistiría en comprar 3 botellas de a 500, 2 de a 1000 y una de a 999. Con ello el descuento se aproximaría a su límite superior, δ_L= 1000/4500 = 22,22 %.

El máximo absoluto se alcanzaría si hubiera botellas de valor nulo. Sería δ_{Lmax} = 1/3 = 33,33 %, fuera cual fuera el valor de las botellas caras adquiridas.

Similarmente podemos proceder para hallar el límite inferior del descuento: se tratará de que una de las botellas quede lo más lejos posible del valor medio, esta vez por defecto. La estrategia es simétrica a la anterior: comprarlas de valores ($p_1-\varepsilon$, p_1, p_1, p_2, p_2, p_2), con lo que el valor promedio es ahora:

$$\overline{p} = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{\varepsilon}{6}$$

El límite inferior será 1/6 = 16,67 %.

JMAiO, nov 99

PALABRAS HETEROLÍTERAS

Son palabras heterolíteras las que no tienen ninguna letra en común: puño/rima, por ejemplo.

Un juego practicado a menudo es hallar parejas de palabras relacionadas heterolíteras. Por ejemplo, ¿cuántos países tienen su nombre y el de su capital heterolíteros?. En todo el mundo no hemos sido capaces de hallar más que los siguientes:

Congo	**Brazzaville**
Fiji	**Suva**
Gabón	**Libreville**
Palau	**Koror**
Perú	**Lima**
Uruguay	**Montevideo**

¿Hay más? Ruego me lo comunique quien los encuentre.

JMAiO, sep 99

UN ANÁLISIS DE LAS ELECCIONES CATALANAS en 1999

Las elecciones autonómicas del 19 de octubre de 1999 en Cataluña han arrojado unos resultados no por previsibles menos emocionantes. Vamos a proceder a su análisis.

Se presentaban seis opciones: **CiU** (coalición Convergència-Unió), **PSC** (Partit Socialista de Catalunya), **PP** (Partido Popular), **ERC** (Esquerra Republicana de Catalunya), **IC** (Iniciativa per Catalunya-Els Verds) y **EUiA** (Esquerra Unida).

Se daba la complicación técnica de que PSC e IC se presentaban en coalición en tres provincias pero no en la cuarta (Barcelona), lo que introduce dificultades al analizar los resultados. Para prescindir de ellas, prorratearemos entre ambos partidos los votos en aquellas provincias de acuerdo con los escaños que los mismos se adjudicaron en ellas, con lo que obtenemos un cuadro más fácil de manejar. Es el siguiente:

PAR-TIDO	B	GI	L	T	TOTAL	E (Esca-ños (real)	E total (resi-duos)	E total (d'Hondt)
CiU	828704	136425	90579	116616	1172324	56	52	53
PSC	945243	71703	48430	84101	1149476	50	51	51
PP	234015	16840	14950	29969	295774	12	13	13
ERC	182633	35988	21818	29639	270078	12	12	12
IC	78171	10243	6919	12014	107347	5	5	4
EUiA	38718	2534	917	2165	44334	0	2	2

Lo primero que se observa es que, contrariamente a lo afirmado por algún mal perdedor, CiU obtuvo la mayoría no sólo en escaños sino también en votos. La mayoría en votos alegada por Maragall sólo lo era computando también los de IC.

Los escaños obtenidos por cada partido no son proporcionales ni siquiera aproximadamente a sus votos, pues Cataluña está dividida en circunscripciones (las cuatro provincias), con representación desigual en cada una (B=85; GI=17; L=15; T=18). En la columna TOTAL encontramos los votos obtenidos por cada formación.

A partir de aquí podemos empezar el análisis de los resultados. De haber sido los escaños proporcionales a los votos totales, los obtenido por cada partido hubieran sido los de las dos columnas finales. En la primera, E (residuos) se supone que los escaños son repartidos de acuerdo con el número entero más próximo, y en la segunda, E (d'Hondt), se expresan los reales según las reglas de juego imperantes. En este caso las diferencias son mínimas, aunque, como era de esperar, favorecen a los partidos grandes.

PARTIT	B (real)	B (t-d'H)
CiU	4	5
PSC	3	4
PP	2	5
ERC	2	4
IC	0	4
EUiA	0	2

Observemos que las posiciones relativas entre los partidos se mantienen, pero las posiciones de CiU y PSC son comparativamente menos fuertes, de modo que alcanzar mayorías absolutas sería más difícil para ambos partidos: tanto uno como otro necesitarían como mínimo el concurso de otros dos, mientras que en la situación real CiU tiene suficiente con uno (PP o ERC).

Por este motivo, los resultados más interesantes se dan cuando investigamos los coeficientes de influencia de cada partido según el método de Banzhaf. Recordaremos que el "índice de poder" de cada partido es el número de coaliciones de mayoría estricta de las que puede formar parte. En la distribución real obtenida, estas coaliciones son:

CiU + PSC:	106
CiU + PP:	68
CiU + ERC:	68
PSC + PP + ERC:	74

Los respectivos índices de poder son por tanto:

CiU:	3
PSC:	2
PP	2
ERC:	2

En una palabra, *tienen el mismo poder los tres partidos segundones*, pese a la gran diferencia de votos y escaños entre ellos.
Sin embargo, si consideramos los resultados ficticios obtenidos de acuerdo con una distribución proporcional de votos, las cosas cambian bastante. Veamos las coaliciones que constituyen mayoría:

CiU + PSC:	104
CiU + PP + ERC:	78
CiU + PP + IC:	70
CiU + PP + EUiA:	68
CiU + ERC + IC:	69
PSC + PP + ERC:	76
PSC + PP + IC:	68
PSC + ERC + IC + EUiA:	69

En una palabra: los coeficientes de poder serían ahora:

CiU:	5
PSC:	4
PP:	5
ERC:	4
IC:	4
EUiA:	2

¡El PP tiene el mismo índice de poder que CiU, y superior al PSC! También supera a ERC. Y todo por un escaño de diferencia, un escaño dependiente de unos centenares de votos, que podrían cambiar completamente el mapa político catalán.

Barcelona, nov 99
JMAiO

Un geólogo investiga el viaje de Alicia al centro de la Tierra

La British Association analiza el tema en un simposio científico.
FERNANDO PAJARES, Efe/*EL MUNDO*

LONDRES.- Un geólogo británico acaba de ofrecer la última explicación sobre uno de los grandes misterios de la literatura inglesa: la lenta, casi interminable caída de Alicia hacia el centro de la Tierra en su viaje al *País de las Maravillas*. «Al principio, la madriguera era como un túnel que seguía hacia adelante, pero de pronto se torció hacia abajo tan inopinadamente que Alicia no tuvo tiempo ni para pensar en detenerse y se encontró cayendo vertiginosamente por lo que parecía un pozo muy profundo». Estamos en el capítulo primero de *Alicia en el País de las Maravillas*. Su autor, Charles Lutwidge Dodgson (1832-1865), más conocido como Lewis Carroll, nos cuenta que Alicia, en su sueño, se mete en una madriguera para seguir a ese conejo con chaleco, reloj de bolsillo y leontina que se le ha aparecido de repente diciendo «¡Ay, Dios mío! ¡Qué tarde voy a llegar!». Y Alicia empieza a caer, a caer y a caer por un túnel del tiempo, por un pozo sin fondo hacia lo que ella cree que es el centro de la Tierra. Aunque *Alicia en el País de la Maravillas* se publicó en 1865 y Dodgson murió hace más de 100 años, en 1898, todavía siguen apareciendo teorías para explicar por qué Lewis Carroll imaginó aquel fantástico viaje de su entrañable Alicia. Es una de esas cosas que los británicos han convertido en un misterio literario. Hubo quienes dijeron que la caída era una alusión de Dodgson al túnel que salía del colegio de Worcester (Oxford) donde él trabajó. Hubo, incluso, quienes creyeron que Carroll había fumado marihuana y, en su alucinación, imaginó aquel viaje surrealista de su personaje. La última teoría es la del geólogo británico Tony Cooper, participante en el simposio científico que ha celebrado la *British Association* en Sheffield (norte de Inglaterra).

Según el profesor Cooper, la explicación es muy sencilla: en la zona de Ripon (cerca de la ciudad norteña de York), por donde vivió Dodgson, había simas, pozos muy profundos que acababan en un complejo sistema de aguas freáticas. Cooper cree que el autor de *Alicia...* conocía los pozos y a ellos recurrió, sin más, para idear el sueño fantástico de Alicia.

Sin embargo, para el diplomático español Jaime de Ojeda, experto en Carroll y buen traductor de *Alice in Wonderland*, todas estas explicaciones no son más que «buscarle tres pies al gato». Consultado por Efe, Ojeda comentó que la explicación de la caída de Alicia es más simple, mucho más simple. «Es muy conocida la relación de Dodgson con las tres hermanas Liddell, una de las cuales, Alicia, se convierte después en su personaje literario. Dodgson las llevaba de excursión por el Támesis. Las niñas le animaban a que les contara cuentos divertidos. Él era matemático y le gustaba hacer fácil el aprendizaje, reducir la aridez pedagógica, con acertijos, con fantasías...».

Dodgson confesó más tarde —recuerda Ojeda— que usaba su imaginación ante las hermanas Liddell «más por tener que decir algo que por tener algo que decir».

«Y es posible que a Carroll se le ocurriera el episodio de la caída al ver los pozos que había por allí, pero no hay ninguna prueba de que exista una relación directa». «Yo creo que no; que lo del viaje hacia el centro de la Tierra es una mera ocurrencia, un recurso literario, o incluso un recurso pedagógico: acudir a una imagen, a un ejemplo, para estimular el interés de las niñas Liddel», añadió.

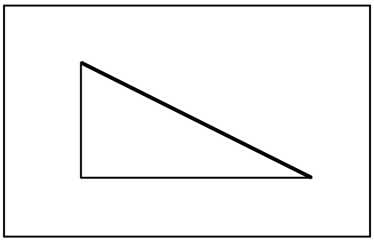
En su prólogo a la edición de *Alicia...* presentada por Alianza Editorial en 1998, Ojeda ya explicaba que «Carroll, como buen matemático, manifestaba un enorme interés por la teoría de la gravitación universal, que se estaba desarrollando entonces». Además, Carroll «ya empleó este recurso en su novela *Silvia y Bruno*, en cuyo capítulo VIII describe la dificultad de tomar el té en una casa que cae vertiginosamente», agrega Ojeda. Y, por fin: «Carroll no es el único en emplear esta imagen. También lo hace Frank Baum al recurrir al túnel que pasa por el centro de la Tierra en sus libros sobre *El mago de Oz*.

Alice

Más información: http://www.tedebojos.com

UNA NUEVA PROPIEDAD DEL NÚMERO ÁUREO

En los libros de geometría de bachillerato es frecuente el siguiente problema: hallar un triángulo rectángulo cuyos lados estén en progresión aritmética. El planteamiento conduce fácilmente al famoso triángulo de lados 3, 4, 5 o a todos sus semejantes, entre los que podemos tomar, por facilidad de comparación, el de hipotenusa igual a la unidad, con lo que los catetos son el coseno y el seno de uno de los ángulos agudos. Los lados del triángulo resultan ser (0,6; 0,8; 1) y ángulo agudo menor B = 36,87º.



Siempre me sorprendió que no se plantee el obvio correlato: hallar el triángulo rectángulo cuyos lados estén en progresión geométrica. Unas fáciles ecuaciones conducen a que, para la hipotenusa unidad, los catetos valen $1/\sqrt{\phi}$ y $1/\phi$ respectivamente, siendo ϕ el conocido número áureo, o sea $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}618...$

El triángulo es el de lados (0,618; 0,786; 1), y el ángulo agudo vale 38,18º.

COMPLEMENTO. Podríamos preguntarnos por el triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión armónica. Cálculos no muy difíciles conducen est vez a una ecuación de cuarto grado, cuya solución es el triángulo de lados (0,632; 0,775; 1), y el ángulo, B = 39,22º.

Josep M. Albaigès i Olivart
Barcelona, noviembre 1999

UNA CURIOSA PROPIEDAD CUADRÁTICA

De antiguo es conocido el triángulo pitagórico:

$3^2 + 4^2 = 5^2$

Para algunos resultarán una sorpresa las siguientes generalizaciones de esa igualdad cuadrática:

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$
$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

Es inevitable preguntarse si estas igualdades son casuales u obedecen a alguna ley. ¿Es así?

SOLUCIÓN A "UNA CURIOSA PROPIEDAD CUADRÁTICA"

Si existe una ley, la correspondiente ecuación tomará la forma:

$$(n-p)^2+(n-p+1)^2+\ldots+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+p)^2$$

Desarrollando y simplificando se llega a:

$$n^2-p(p+1)+p=p(p+1)$$

O sea, finalmente:

$$n=2p(p+1)$$

De donde salen fácilmente los siguientes términos:

$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

Obsérvese que la base del último cuadrado del término de ella izquierda es siempre el cuádruple de un número triangular.
Estas series presentan una analogía trivial con las del tipo:

1 + 2 = 3
4 + 5 + 6 = 7 + 8
9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15

que es también muy fácil generalizar.

JMAiO, Salou, sep 99