CARROLLIA, nº 64, marzo 2000

CARROLLIA

Dirección en la web: **www.ciudadfutura.com/juegosmensa/carrollia.html**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès	**Francesc Castanyer**
e-mail: jalbaiges@caminos.recol.es	

Los meses de junio y diciembre se entrega, incluida en la subscripción, la revista **BOFCI**, órgano de la **FCI** (Facultad de Ciencias Inútiles), coordinada, dirigida, editada y remitida por los mismos editores.

El vencimiento de la subscripción corriente se indica en la etiqueta postal. Los que la hayan excedido razonablemente pasarán a la categoría carrolliana de “Sonrisa de gato de Cheshire” (esto es, de recuerdo...).

SUMARIO

PORTADA CASTELLERA

El pasado 24 de octubre, en la octava de santa Úrsula, unos buenos amigos vallenses (de Valls, Tarragona) me invitaron al increíble espectáculo de la formación de las torres humanas, llamadas en catalán *castells*. Como las 11.000 vírgenes de la santa de Colonia, otros tantos atletas de la ciudad se afanan en ese día para montar increíbles castillos, en matemático desprecio al aire, como diría Rodrigo Caro. Milagros de fuerza, habilidad y equilibrio, esas formaciones escalan hasta alturas que se creería fuera del alcance del músculo y del vértigo, siempre en busca de un *altius* al que por ahora no se ve límite.

De las numerosas fotos que pude tomar desde mi mirador privilegiado, he escogido ésta... la de una de las *llenyes* (caídas) que se produjeron. Espero no crean mis buenos amigos que quiero con ello mostrar el lado débil de su arte (que tampoco lo es), sino por el contrario, recoger la belleza de un derrumbamiento. Ese mágico instante en que los cuerpos, fuera de esas millonésimas de margen que permiten la existencia de la delicada construcción, se abaten sobre el suelo, son quizás los más grandiosos. Pues los *castellers*, cayendo, siguen manteniendo y aun superando el arte con que se elevaban, retorciéndose, esquivando y buscando en la instantánea pirueta la posición más adecuada para el aterrizaje suave sobre los cuerpos de sus compañeros.

Recomiendo observar con detenimiento la fotografía. Ver el semblante, preocupado pero no despavorido, de las dignas autoridades que desde el balcón del Ayuntamiento contemplan el ballet aéreo. Ese *anxaneta* (coronador de la torre, en ese caso frustrado) que, sin pánico, se prepara para los seis metros de recorrido que le quedan hasta las duras espaldas del “suelo” formado por sus compañeros más robustos. Esos atentos formadores del *folre* (primer piso) que vigilan la caída para acoger a sus socios y atemperar su riesgo. También hay algún que otro poseído por el pánico que intenta alejarse cuanto antes. Y el público de la plaza, sobrecogido por la belleza de ese segundo mágico.

Enhorabuena, amigos vallenses. Seguid con vuestro arte. Como dijo el poeta,

Pon arriba tus ojos, siempre arriba.

JMAiO

64

¡Por fin un número algo regular! Es una potencia exacta: $2^6 = 64$, y décimo autonúmero. Sexta potencia de 2, que continúa las propiedades dicotómicas sucesivas de la serie 2, 4, 8, 16, 32. Su representación es 100 en base octal y 1.000.000 en la binaria. Es también cuadrado y cubo a la vez:

$64 = 8^2 = 4^3$

Por todo ello es frecuente en subdivisiones y en lúdica. Los 64 símbolos de *I-Ching* chino, formados con todas las combinaciones posibles realizables con 6 líneas o partidas, suscitan hoy nuevamente gran atención, así como los 64 yogui-nis del tantrismo.

Es también el número de casillas del tablero de ajedrez, que originó el célebre probelma de los granos de trigo, cuya solución, $2^{64} – 1$, es un número de 20 cifras.

Es el número más pequeño con 6 factores pri-mos (el siguiente es 96). Por ser cubo, es suma de números hexagonales centrados: 1 + 7 + 19 + 37 = 64.

El pequeño toerema de Fermat dice que si *p* es primo, entonces entonces a^{p-1} es divisible por *p*, siempre que a no lo sea. Y, para cada primo *p*, existen valores de a tales que $a^{p-1} – 1$ es divisible por p^2. El menor valor de este tipo para p = 3 es $8^2 = 64$. Así, 64 – 1 es divisible por $3^2 = 9$ (para $p = 5$, el siguiente primo, la solución más pequeña es $7^4 – 1$, divisible por 25).

Es el único cuadrado cuya suma de cifras es congruente con 1 (mod un cuadrado) y su producto congruente con –1 (mod un cuadrado).

En el ejército se utiliza la división de la circunferencia en 6400 milésimas artilleras (^{oo}). Así, en radianes, 1^{oo} = 0,000982 radianes, lo que simplifica los cálculos.

Es el número gemátrico del gr. αλεθεια, “verdad”.

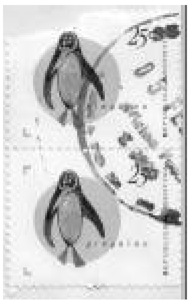
Año del incendio de Roma y de la primera persecución de los cristianos por Nerón.

En loterías es “la casa”.

A TAL MILENIO, TAL CORREO

De nuevo las heladas regiones meri-dionales argentinas sirven de ilustración para el correo. El canal de Beagle ya no suscita ecos de desavenencias entre países hermanos, sino que sirve de bello fondo a la ciudad más meridional del mundo, Ushuaia. Desde casi el fin del mundo llegaron noti-cias de Ricardo Isaguirre, quien desde su habitual Río Gállegos había hecho un viaje a la todavía más lejana Ushuaia, lugar del que deja constancia con un slogan singular y unos simpáticos sellos de correos, bien alusivos. Dejemos que él mismo lo cuente:

Estuve pasando unas pocas semanas en Ushuaia, a unos 500 km al sur de Río Gallegos, en la isla de Tierra del Fuego. Te mando dos fotos de la ciudad, una actual y otra de la década de los 50 (probablemente), para que veas cómo ha crecido la que llaman la más austral de las ciudades. Verdadera-mente es un lugar muy hermoso, rodeado de altas montañas que arrancan casi desde el mar, y están cubiertas de bosques y de nieves eternas. Tam-bién aquí debes venir pronto.



De todas mane-ras, te cuento que yo volveré a La Plata en marzo próxi-mo. Así me lo ha pedido mi obispo (el de La Plata), y lo haré con gusto. Otra vez estaré cerca de nuestro común amigo Viaña.

No quiero au-mentar las referencias (insoportables) al año 2000 y a su comienzo, ni al comienzo del Milenio (ni del siglo XXI), pero creo modestamente que lo mejor es adoptar la actitud del Papa, que ha dicho todas las veces que no se trata de una precisión (imposi-ble e inútil) de fechas. ¿Cuándo termina el milenio? Durante todo el 2000. ¿Cuándo comienza en nuevo Milenio? Lo mismo, durante todo el 2000. Lo realmente importante no es la fecha, sino lo que ella commemora.

Deseo que esos años de “destierro” no hayan sido excesivamente duros; a mí me gustaría visitar las soledades patagónicas, pero una cosa es visitar y otra vivir. De todos modos, intuyo en las preciosas fotografías que has ido mandando una forma de relación con la naturaleza muy distinta no ya de la ciudad sino de la del campo cultivado y domesticado, mera extensión de la capacidad transformadora del hombre. Los ingenieros nos ponemos algo nerviosos ante la naturaleza indómita, y sentimos un afán frenético por dominarla y hacerla a nuestra medida; supongo que nos han transmitido que nuestra misión en la tierra es vencer a lo que nos han presentado como nuestro enemigo (al fin y al cabo, dice el Gén 1,28: “Creced y multiplicaos y dominad la tierra”).

Para tener una idea de las distancias en que te mueves, se me ha ocurrido calcularlas (en línea geodésica) con un programita de ordenador. Éstos son los resultados:

DE	Long.	Lat.	A	Long.	Lat.	D(km)
Barcelona	2,2	41,3	Río Gallegos	-69,3	-51,6	12407
Barcelona	2,2	41,3	Ushuaia	-68,3	-54,8	12583
Barcelona	2,2	41,3	Buenos Aires	-58,6	-34,6	10466
Buenos Aires	-58,6	-34,6	Ushuaia	-68,3	-54,8	2366
Buenos Aires	-58,6	-34,6	Río Gallegos	-69,3	-51,6	2074
Río Gallegos	-69,3	-51,6	Ushuaia	-68,3	-54,8	362

Antonio Casao, de Zaragoza, es constante colaborador de [C]. En esta ocasión mandó diverso material, que veréis repartido en este número, y unas observaciones:

Me acordé de nuestro círculo “carrolliano” mientras leía *Historia de la verdad y una guía para perplejos* de Felipe Femández-Armesto, un libro interesantísimo tanto para quienes creen conocer la verdad como para los que piensan que nunca puede encontrarse. Allí se habla mucho sobre escepticismo, positivismo, etc. con abundantes y poco conocidas anécdotas. Pero si me acordé de "Carrollia" fue porque allí se habla de un mártir de los pasatiempos lógicos. Se trata de Diodoro Casio, quien a finales del siglo IV antes de Cristo, se suicidó avergonzado tras ser incapaz de resolver unos pasatiempos lógicos en presencia del gobernante de Alejandría.

Por último, quiero informarte de la aparición de un libro de Manuel Conthe, en el que se recogen sus artículos "carrollianos" en *Expansión*. de los cuales te he enviado alguna fotocopia en el pasado. Se titula *El mundo al revés* y lo edita Planeta.

Muchas gracias por tu envío, Antonio. Tengo ganas de verte un día para poder comentar muchas cosas en torno a la situación actual de Mensa, que por fortuna está cobrando un nuevo impulso de la mano de una junta entusiasta.

El libro de Manuel Conthe me interesa ya desde un principio, y voy a ver de hallarlo. Efectivamente, ya había yo leído algo de este hombre, y se encontré muy interesante.

El caso de Diodoro de Casio me recuerda el de Fibonacci, que se dejó morir de hambre para no fallar su autoprofecía sobre el día de su muerte (fue publicado hace unos números de [C])

Otro constante colaborador es Mariano Nieto, de Madrid. En el número anterior se habían traspapelado una carta suya, hoy ya recuperada, por lo que entonces sólo pude referime a ella de memoria. Mariano hablaba de las “espresiones enmarañadas” en Álgebra:

Para terminar te incluyo una expresión enmarañada de un valor numérico muy sencillo que encuentro en *Matematica Dilettevole e Curiosa*, de Italo Ghersi., uno de los mayores clásicos en matemáticas recreativas:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11-\sqrt{21}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{21}\right)}\right]}$$

Descubro que, como esos nudos enrevesados, hay expresiones aritméticas que resulta muy difícil desenredar.

He aquí otras enmarañadas por mí y que son simplemente números enteros.

$$\sqrt{6}+\sqrt{15-6\sqrt{6}} \quad ; \quad \sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}} \quad ; \quad \sqrt{7}+\sqrt{7}\sqrt{8-2\sqrt{7}}$$

¿Cómo simplificarlas? Si usas la calculadora darás rápidamente con el valor de cada expresión. Pero ¿cómo proceder sin la ayuda de la maquinita?

En mi recuerdo, las matemáticas de Fibonacci prestaban gran atención al arte de enredar y desenredar estas expresiones. Este tema ha caído en el olvido, y celebraríamos una colaboración de algún mensista sobre el tema.

Fernando Martínez Fuerte, de Madrid, acompaña su felicitación navideña de la corrección de un lapsus en mi nota sobre las capitales de estados heterónimas con el nombre de éste:

No lo son **Gabón/Libreville** por culpa de la "b". Un lapsus.

En cualquier momento me animo y os mando alguna colaboración.

Aprovecho para desearte un feliz 2000 y siguientes.
Abrazos,

Gracias, Fernando, y aquí te quiero, escopeta: venga esa colaboración.

Curiosamente, otros dos carrollistas, Josep M. Solé, de Juneda (Lleida), y Fernando G. Iglesias, de Pamplona, señalaron un nuevo par: **Lichtenstein-Vaduz**, que por ahora cierra la cuestión.

José Antonio de Echagüe, de Madrid, manda una interesante carta-desafío:

Te envío estas líneas para desearte a ti y a todos los amigos de C. el más venturoso, próspero, feliz y tranquilo Año 2.000 (entre nosotros: ¡menudo timo de futuro que es esto, tío!, como dice mi hijo).

Te adjunto unas notas sobre una sucesión con la que me topé hace años, en un asunto profesional, quizás sea muy conocida, lo ignoro.

La sucesión de José Antonio resultó tener mucho meollo y merecer un artículo por sí sola, que hallaréis en otro lugar de la revista con el título UNA SUCESIÓN INTERESANTE. Es el fruto de las reflexiones de su autor, de Miguel Á. Lerma y mías. Agradecimiento a ambos desde aquí.

A propósito de otra carta de Rafael León, de Málaga, sobre la tumba de los “cuatro” Reyes Magos en Colonia, comentada a veces en [C], aprovecho para hacer una rectificación. Este verano, aprovechando mi viaje a Francia y Alemania por el eclipse, investigué si esto era cierto, y resulta que no hay tal: *son tres*. El malentendido de los cuatro (que yo mismo contribuí a difundir en mi ENCICLOPEDIA DE LOS NOMBRES PROPIOS, mea culpa) se debe a que en el bajorrelieve que los representa en la catedral hay un cuarto personaje (un paje, sin duda) que la imaginación popular confundió con un rey extra, difundiendo así la leyenda. En la documentación de la misma Catedral se aclaraba el entuerto.

Carta de Javier G. Algarra, de Madrid, proponiendo un problema ingenieril:

Ayer, en la lista Mensaspain, salió a la luz una cuestión interesante a cuenta del proyectado túnel del Guadarrama para el AVE. En un cálculo rápido, teniendo en cuenta que se trata de horadar dos túneles de 25 km cada uno, de nueve metros de diámetro, me salió que se generarán nada menos que 3,2 millones de metros cúbicos de escombro granítico que hay que almacenar en alguna parte. Puse como imagen un gigantesto monolito de 320 m de altura (como la torre Eiffel aproximadamente) y una base cuadrada de 100 m.
La pregunta es la siguiente: supongamos que el granito que se extrae está pulverizado en pequeñas partículas, lo que obviamente impide almacenarlo en forma de columna, y que decidimos hacer un "montón" que se aproxima a un cono perfecto. ¿Qué base mínima (y por tanto altura máxima) tendría dicho montón de escombros? ¿Qué factores influyen para calcularlo (naturaleza del material, homogeneidad, etc.)?

Mi fibra caminera se siente conmovida. De hecho, éste es un problema bastante corriente en construcción de carreteras, donde hay que calcular las alturas de los montones de acopios.

El material acopiado se distribuye según el "coeficiente de rozamiento φ", que es adoptado por los gránulos al disponerse en pendiente. Un valor habitual es $\varphi = 30^{\circ}$.

Es fácil ver que el volumen de un cono cuya generatriz forma un ángulo φ con el plano del suelo es $V = (\pi r^3 \tan \varphi)/3$. Igualando este valor con $3{,}2 \times 10^6$, resulta r = 174 m, o sea h = 100 m. No es un valor tan impresionante como el de la Torre Eiffel, pero hay que tener en cuenta que la base tendría 348 m de diámetro.

Otro eficaz y constante colaborador de [C] es Antonio Cebrián, de Sagunto, que en esta ocasión se ha superado a sí mismo imaginando cabriolas alrededor del número 64. Veamos la carta que me mandó para ilustrar sus artículos:

El número 64 da mucho de sí en el tema de Cuadrados Mágicos. Por ello con la presente te remito 8 hojas para que las publiques en el próximo [C-64].

Detalle del material:

1.- Elipse mágica con los 64 primeros números.
2.- Cuadrado Mágico de 8 x 8 que contiene 9 C.M. de 4 x 4.
3.- El deporte de llegar a Pl con 6 y 4.
4.- El 64 sumando dígitos.
5.- Cruz mágica con los 64 primeros números.
7.- Rectángulo mágico hueco.

Abrumado por tal abundancia me decidí a solicitarle esta vez su “secreto”. Antonio accedió gentilmente, en la tradición de los científicos a quienes no importa compartir con el mundo sus descubrimientos. He aquí su respuesta:

La fórmula que utilizo es:

Ayuda informática + Trabajo + Azar = Eureka

Proceso:

1.- He confeccionado un pequeño programa en Basic que, utilizando la Ley de los grandes números, podemos saber que hay una probabilidad del 19% (aproximadamente) de que la suma de "x" dígitos aleatorios sea un número dado de 2 cifras.
2.- Con ayuda del programa inforrnático *Derive* obtengo valores aproximados con 30 dígitos o más de 50 expresiones matemáticas (irracionales o trascendentes).
3.- He confeccionado otro programa en Basic que, entrando manualmente números de 30 ó más dígitos, me da aquellos números cuyos dígitos suman un número deternúnado (por ej.= 64).
Finalmente teniendo en cuenta la probabilidad del 19 % y entrando 50 números con sus **30** dígitos obtengo alrededor de 9 o 10 expresiones que sus dígitos suman un número dado.

Respecto a sumar o restar dígitos a pares (en grupo de 2 cifras), sólo hay que pensar que el número total de sumas algebraicas posibles es $\mathbf{2^p}$ (p = n^o de pares); si p = 12 $\rightarrow$ sumas = 4096.
¿Entre 4096 sumas posibles, no será fácil obtener alguna cuya suma sea = 64?
Espero haberte desvelado algo de mi secreto que, en esencia, es = trabajo, trabajo y suerte.

Realmente el procedimiento es ingeniosísimo, y sus frutos los hallaréis en este número (no todos, lamentablemente, por el espacio, que es un tirano). Muchas gracias, Antonio, y confiamos en seguir disfrutando de tus hallazgos (una sugerencia: ¿por qué no le buscas las vueltas al 2000? Un año tan redondo bien lo merece.).

Por suerte, este número no estaba completo al empezar marzo, pues así tuvo tiempo de entrar una carta de José A. de Echagüe, de Madrid, fechada el 29.2.2000 (“día algo especial, al parecer”, según su rimitnete):

Te adjunto un par de notas, por si las ves de interés. En todo caso, quedan a tu salud.
P. S. Estoy seguro de que a todos los amigos de C les encantará saber que, por fin, me he retirado de vicios (de casi todos). Ya no fumo, ni bebo, ni voto.

Muchas gracias, José Ant., por esa carta en un tipo de fecha que, en efecto, no se repetirá hasta dentro de 400 años. Tu retirada de vicios me recuerda la de uno que se indignaba cuano de él se decía que “ni fuma, ni bebe ni nada”, aclarando que no admitía no de “ni nada”... hasta que se supo que era campeón de natación.

Publico el curioso problema sobre (¡una vez más!) el número áureo. En cuanto a esa perla que es la nota de Chamfort, pasa ipso facto a mi libro en preparación sobre “citas en cascada” a lo largo de la historia.

Y ahora otra carta que debió ir la primera. Por problemas tanto de correo como de coordinación como de composición, el envío de Jorge Viaña, de La Plata (Bs As, Argentina), fechada hace más de un año, no se publica hasta hoy. Decía Jorge en el ya lejano 1998:

Con la presente hoja vuelvo a incursionar en la *Facultad de Cs. Inútiles*, con un nuevo y distinto tema que, espero guste y pueda recibir aportes de otros, para prolongarse en el futuro.

En otras ocasiones —y si resulta de interés— prolongaré esta cátedra con nuevas barrabasadas postales (no se sorpendan pues los lectores del BOFCI si alguna vez se comenta el caso de algún emirato que haya emitido algún sello con St. Barrabas). Estas emisiones, frecuentes en países de la ex-órbita comunista, se emitían para ofrecer íntegramente a comerciantes mayoristas de Europa y USA, como un medio de ingresar divisas.

Jorge se refería, claro, a su cátedra de *Filatelia Insólita*, cuya aportación aparece en el número del BOFCI que acompaña este [C]. Perdona el retraso, Jorge.

En fin: un argentino abrió esta sección otro la cierra con el otoño (primavera para nosotros) ya asomando. No podía darse mejor escolta. Muchas gracias una vez más a todos por vuestras colaboraciones, que son la salsa de la revista.

El editor

AFICIONADOS AL TEATRO

Miguel y Nadia fueron al teatro, cada uno por su cuenta, pues no se conocían, a ver *Hamlet*, obra que fue representada el año pasado en un teatro de la ciudad. La obra fue interpretada durante veinte días en sesiones de tarde y noche. ¿Qué posibilidades tenían de sentarse juntos, uno al lado del otro, teniendo en cuenta que la platea del teatro tiene 30 filas y en cada fila hay 28 asientos? a) Suponemos que que la platea no está dividida por pasillo alguno. b) Suponemos que la platea está dividida en dos, derecha e izquierda, números pares e impares, por un pasillo central.

(Remitido por Miguel Clusa)

SOLUCIÓN A “AFICIONADOS AL TEATRO”

Llamaremos “asientos exteriores” a los situados a los lados de la platea, e “interiores” a los restantes. La probabilidad de que Miguel se siente en un asiento interior es p_i = 26/28, y la de exterior es p_e = 2/28.

Si Miguel está en un asiento interior, la probabilidad de que Nadia se siente en el mismo día y en la misma fila es 1/20·30 = 1/600. Si se da ese evento, la probabilidad de que se siente a su lado es 2/27. Análogamente, si está en uno exterior, la probabilidad de coincidencia, supuestas realizadas las de día y fila, se reduce a la mitad, 1/27. Por tanto, la probabilidad total es:

$$p = \frac{1}{600}\left[\frac{26}{28}\cdot\frac{2}{27}+\frac{2}{28}\cdot\frac{1}{27}\right] = \frac{1}{8400} = 0{,}00119$$

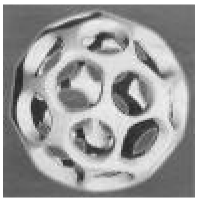
(Es más fácil el razonamiento: Para que Nadia pueda sentarse a la derecha de Miguel, éste deberá ocupar cualquier asiento excepto el extremo derecho, p = 27/28. Cumplida esta condición, la probabilidad de que Nadia se siente a su derecha es 1/(30·20·27) = 1/8100. Multiplicando ambas probabilidades y doblando para tener en cuenta el caso simétrico de Nadia a la izquierda, se obtiene el mismor esultado anterior).

Efectuado este razonamiento, es fácil extenderlo al caso de varios pasillos. Si hay uno solo, es p_i = 24/28; p_e = 4/28, luego:

$$p = \frac{1}{600}\left[\frac{24}{28}\cdot\frac{2}{27}+\frac{4}{28}\cdot\frac{1}{27}\right] = \frac{13}{11340} = 0{,}00115$$

JMAiO, feb 00

ALGO MÁS SOBRE LOS FULERENOS



Alpha, la primera joya basada en **fulerenos**

Si el diamante les parece un mineral extraordinario, aún no conocen los fulerenos. Descubiertos en 1985, se han sumado al grafito y al diamante como las únicas formas de carbono puro que se conocen. Pero sus propiedades son todavía más asombrosas. Con una estructura tridimensional —el fulereno más sencillo es un mecano de sesenta átomos que tiene exactamente la forma de un balón de fútbol—, estos compuestos son el germen de una revolución tecnológica: sus frutos incluirán nuevos fármacos, chips más rápidos, fibras ultrarresistentes o combustibles de cohetes. Prueba del potencial de este campo de investigación es que los descubridores de los fulerenos ya han recibido el premio Nobel.

Tomado de Josep Corbella, LA VANGUARDIA, 16.01.00

Recordemos que el fulereno es el poliedro semirregular formado por doce pentágonos y veinte hexágonos, investigado por el arquitecto estadounidense miembro de Mensa Robert Buckminster Fuller.

ALGUIEN SOÑARÁ

¿Qué soñará el indescifrable futuro? Soñará que Alonso Quijano puede ser don Quijote sin dejar su aldea y sus libros. Soñará que una víspera de Ulises puede ser más pródiga que el poema que narra sus trabajos. Soñará generaciones humanas que no reconocerán el nombre de Ulises. Soñará sueños más precisos que la vigilia de hoy. Soñará que podremos hacer milagros y que no los haremos, porque será más real imaginarlos. Soñará mundos tan intensos que la voz de una sola de sus aves podría matarte. Soñará que el olvido y la memoria pueden ser actos voluntarios, no agresiones o dádivas del azar. Soñará que veremos con todo el cuerpo, como quería Milton desde la sombra de esos tiernos orbes, los ojos. Soñará un mundo sin la máquina y sin esa doliente máquina, el cuerpo. La vida no es un sueño, pero puede llegar a ser un sueño, escribe Novalis.

Jorge Luis Borges, *Los Conjurados*
(Remitido por José Luis Casaus Lambea como Christmas de 1999)

CUESTIÓN DE TRIANGULARIDAD

De una terna de números se dice que es triangular cuando con segmentos de tales dimensiones puede construirse un triángulo en el plano (euclídeo, para no complicar las cosas de momento). Esto implica que cada uno de los tres números sea estrictamente menor que la suma de los otros dos.
La cuestión que ahora planteo es la siguiente: ¿Existen números reales positivos X tales que la sucesión de sus potencias tenga la propiedad de "triangularidad"? Es decir, que tomados tres términos sucesivos cualesquiera de la sucesión de potencias de x, se pueda construir un triángulo con tales valores.
Lo curioso de esta cuestión es que, bajo una apariencia fuerte, es de una gran sencillez. ¡Por supuesto que existen estos valores de X!. Y son bastante especiales, y al mismo tiempo muy conocidos de todos los amigos de C.
J. A. E.
------------------- - ----------------- ---

Solución.
Si no me he equivocado (cosa harto frecuente en mí, según vengo observando) tal propiedad se satisface para los valores de X menores que, ϕ y mayores que ϕ - 1, y sólo para ellos (donde ϕ, naturalmente, para variar, es el "número aúreo").
Otra propiedad del famoso numerito. Propiedad que, por cierto, da que pensar. Es de sobra conocida la omnipresencia de proporciones aúreas (o de sus hermanos los términos de la *Sucesión de Fibonacci)* en muchos procesos naturales . ¿Podrá tener algo que ver con que sólo para estos valores acotados se dé la posibilidad de triangularidad de tres valores o de tres fuerzas en sucesión geométrico potencial, y no para otros valores mayores o menores?

J. A. E.

NOTA DE JMAiO: **La solución que da el propio JAE es impecable. Según la propiedad fundamental de la triangularidad, deberá ser $x^n + x^{n+1} > x^{n+2}$ si $x > 1$, o $x^n < x^{n+1} + x^{n+2}$ si $x < 1$. La frontera de esos campos de valores se dará sustituyendo las anteriores desigualdades por igualdades, de donde salen fácilmente las soluciones dadas.**

No veo por mi parte aplicación a la naturaleza de esta propiedad, pero me atrevería a decir que hayla: quizás habría que investigar por el "triángulo dorado" (el de ángulos 72º-72º-36º) y sus sucesivas ampliaciones (que definen la espiral de la figura), que van definiendo radios vectores que son múltiplos fibonaccianos de ϕ más otros números de Fibonacci (GF = ϕ; FE = ϕ + 1; ED = 2ϕ + 1; DC = 3ϕ + 2; CB = 5ϕ + 3; BA = 8ϕ + 5;... Pero también las potencias de ϕ son expresables como combinación lineal del mismo: $\phi^2 = 1 + \phi$; $\phi^3 = 2 + \phi$; $\phi^4 = 2 + 3\phi$; etc... ¡Es decir, los mismos números!

NUEVOS CALENDARIOS

Este 2000 da para seguir hablando de calendarios por culpa de su bisextilidad, que, como es sabido, sólo se presenta una vez cada 400 años... en los terminados en 00. No es cosa de volver a hablar de la reforma gregoriana, tema que ha sido tratado muchas veces en la spáginas de [C], pero sí podríamos hacer un breve comentario sobre los calendarios que podrían ser y no son, pese a haberse insistido en que 2000 hubiera sido un buen momento para implantarlos.

¿Qué decir más sobre los inconvenientes aportados poe esos meses de 28, 29, 30 y 31 días? Los primeros calendarios propuestos aprovecharían la igualdad aritmética $365 = 12 \times 28 + 1$, implantándose 13 meses de 28 días cada uno, al final de los cuales se añadiría un día *blanco* (o dos, según los años), naturalmente festivo, fuera de semana. ¿Pueden concebirse mayores falcilidades? Cada mes tendría 4 semanas exactas, todos los meses serían iguales, se acabaría con la lata de los calendarios perpetuos, etc.

El primero en proponer este calendario reformado fue el abate italiano Mastrofini en 1834, y Auguste Comte volvió a la carga con él en 1849. El “día blanco” sería el 29 de diciembre, y otro día blanco extra, cada cuatro años, el 29 de junio. ¡Simetría perfecta!... Salvo que 12 es un número muy cómodo, y la división del año en 13 rompe los esquemas estacionales y divisorios de año. A esta reforma, propuesta formalmente a principios de siglo, le pusieron la proa muchos países: Japón, el Reino Unido, Suiza, Grecia... ¡e Italia!

Conque los irreductibles del calendario racional volvieron al a carga, capitaneados por el astrónomo francés Pierre Couderc, proponiendo un calendario simplificado ciertamente ingenioso, válido no ya para todos los años, sino para todos los trimestres. Helo aquí, con las modificaciones introducidas por Walter Naucke:

ENERO								FEBRERO								MARZO						
ABRIL								MAYO								JUNIO						
JULIO								AGOSTO								SEPTIEMBRE						
OCTUBRE								NOVIEMBRE								DICIEMBRE						
L	M	X	J	V	S	D		L	M	X	J	V	S	D		L	M	X	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7					1	2	3	4							1	2
8	9	10	11	12	13	14		5	6	7	8	9	10	11		3	4	5	6	7	8	9
15	16	17	18	19	20	21		12	13	14	15	16	17	18		10	11	12	13	14	15	16
22	23	24	25	26	27	28		19	20	21	22	23	24	25		17	18	19	20	21	22	23
29	30	31						26	27	28	29	30				24	25	26	27	28	29	30

Se intercalaría un día blanco en el lugar apropiado, más otro los años bisiestos.

Las ventajas de ese calendario son grandes. Ciertamente el mes no es múltiplo de la semana, pero todos los trimestres son iguales, y la uniformidad conseguida es notable. Además, el calendario podría introducirse un año que empezara en lunes, con lo que el tránsito con el actual calendario sería imperceptible. ¡Comparémoslo con la reforma gregoriana de 1582, con sus diez días suprimidos, cuyas consecuencia perduraron durante siglos!

El cambio iría acompañada de la estabilización de la fecha de la Pascua, tema escabroso que ya motivó la anterior reforma gregoriana, pero la Iglesia no pone inconvenientes a su fijación en el segundo domingo de abril. De hecho el calendario fue sometido a los países más adelantados, e incuso en algunos se votaron leyes para su progresiva adopción, pero nada se ha adelantado hasta el momento. ¿La razón? Aparte de la resistencia a cambiar universalmente algo tan arraigado entre nosotros, muchos dudan de la conveniencia de suprimir el famoso “hilo continuo” de la semana que nos vincula a los tiempos más remotos.

Es de suponer pues que continuaremos esperando mucho tiempo la posible reforma.

JMAiO, feb 2000

EL 31 DE DICIEMBRE DE 1999
ES EN DISTINTO S CALENDARIOS:

Gregoriano: 31 diciembre 1999
Chino: 24/11 ji-mao ciclo 78
Hindú-lunar: 24 margasira 2056
Hebreo: 22 tevet 5760
Revolucionario francés: 1 nivoso 208
Hindú-solar: 15 dhanu 1921
Etíope: 21 takh'sa's 1992
Copto: 21 kiyahk 1716
Juliano: 18 diciembre 1999
Islámico: 23 ramadán 1420
Persa: 10 dey 1378

JMaiO, 1999-12-31

EL "ALFABETO SHAW"
COMO FORMA DE SIMPLIFICAR EL INGLÉS

Es muy conocido el artículo en que G. B. Shaw satirizaba el complicado sistema fonético inglés (en él me inspiré para aplicarlo al castellano en el artículo LA NUEBA ORTOGRAFIA, publicado en [C-28], pág. 24). Un sencillo ejemplo con el que GBS ilustraba la necesidad de esa reforma era deduciendo cómo se debía pronunciar la palabra **ghoti**:

> **gh** is pronounced **f** as in **cough**; **o** is pronounced **i** as in **women**; **ti** is pronounced **sh** as in **nation**. Thus **ghoti** is pronounced **fish**.

Comentando las dificultades de la fonética inglesa, tan ligada a las clases sociales, GBS comentaba: "*It is impossible for an Englishman to open his mouth without making some other Englishman hate or despise him*". Buscando suprimir este problema, ideó un alfabeto fonético (el "*shaviano*") para pronunciar el inglés más fácilmente. Una fundación dedicó gran parte de la herencia del ilustre comediógrafo a expandirlo por el mundo, y aunque llegó a publicarse una de sus obras en él (*Androcles and the Lion*), su difusión ha sido prácticamente nula. Más tarde, la firma *Stephen Austin and Sons, Ltd*. de Hertford, England, diseñó un "equivalente" en signos latinos que al menos es legible. En el último número de LINGUASIGNAL, el boletín del LINGUASIG (Alan Turner, 47 Cornwall Drive, Bayston Hill, SHREWSBURY SY3, OEP, UK), Michael Bell daba una interesante información sobre el tema.

No se trata aquí de comentar las complicaciones del alfabeto (el lector interesado puede ampliar esta información en http://members.aol.com/RSRICHMOND/shavian.html), sino de dar una idea de la forma cómo "suena" algo escrito en shaviano. Para ello publicamos un buen ejemplo, nuestro conocido *Jabberwocky*, escrito de esa forma por Stanley Marx en 1962. Para mayor facilidad, ofrecemos al lado el texto original.

Alfabeto latino	Alfabeto shaviano latinizado
JABBERWOCKY ‘Twas brillig, and the slithy toves Did gyre and gimble in the wabe: All mimsy were the borogoves And the mome raths outgrabe. “Beware the Jabberwock, my son! The jaws that bite, the claws that catch! Beware the Jubjub bird, and shun The frumious Bandersnatch! He took his vorpal sword in hand: Long time the manxome foe he sought— So rested he by the Tumtum tree, And stood awhile in thought. And, as in uffish thought he stood, The Jabberwock, with eyes in flame, Came whiffling through the tulgey wood, And burbled as it came! One, two! One, two! And through and through The vorpal blade went snicker-snack! He left it dead, and with its head He went galumphing back. “And hast thou slain the Jabberwock? Come to may arms, my beamish boy! O frabjous day! Callooh! Callay!” He chortled in his joy. ‘Twas brillig, and the slithy toves Did gyre and gimble in the wabe: All mimsy were the borogoves And the mome raths outgrabe.	/JAbDwykI twuz brilig, n H slFHI tOvz did gFD n gimbal in H wEb; Yl mimzI wx H bPagOvz, n H mOm rATs QtgrEb. bIwX H /JAbDwyk, mF sun! H JYz HAt bFt, H klYz HAt kAc! bIwX H /JubJub bxd, n Sun H frMmWs /bAndDsnAc! hI tUk hiz vPpal sPd in hAnd: lYN tFm H mANksam fO hI sYt - sO restad hI bF H /tumtum trI , n stUd ahwFl in TYt. And, Az in ufiS TYt hI stUd , H /JAbDwyk, wiH Fz v flEm, kEm hwifliN TrM H tulJI wUd , n bxbald Az it kEm! wun tM! wun tM! n TrM n TrM H vPpal blEd went snikD-snAk! hI left it ded , n wiH its hed , hI went galumfiN bAk. And hAst HQ slEn H /JAbDwyk? kum t mF Rmz, mF bImiS bq! O frAbJas dE! kalM! kalE! hI cPtald in hiz Jq. twuz brilig, n H slFHI tOvz did gFD n gimbal in H wEb; Yl mimzI wx H bPagOvz, n H mOm rATs QtgrEb.

¡Que lo disfrutéis, amigos!

JMAiO, feb 00

EL ÁNGEL DE LOS NÚMEROS

A Eduardo Rodrigáñez[1]

Vírgenes con escuadras
y compases, velando
las celestes pizarras.

Y el ángel de los números,
pensativo, volando
del 1 al 2, del 2
al 3, del 3 al 4.

Tizas frías y esponjas
rayaban y borraban
la luz de los espacios.[2]

Ni sol, luna, ni estrellas,
ni el repentino verde
del rayo y el relámpago,
ni el aire. Sólo nieblas.

Vírgenes sin escuadras,
sin compases, llorando.
y en las muertas pizarras,
el ángel de los números,
sin vida, amortajado
sobre el 1 y el 2,
sobre el 3 y el 4...

Rafael Alberti, *Sobre los ángeles*

---

[1] Fue José Bergamín quien le presentó a Alberti a Rodrigáñez, ingeniero de vocación a quien el poeta recuerda como –"un gran amigo mío". Aficionado como el poeta al cine, su nombre aparece en la "Lista de inscripciones" del Cineclub Español *(La Gaceta Literaria*, núm. 48, 15 de diciembre de 1928).

[2] Alberti recuerda el haber estado en las clases "completamente ausente, vuelto sólo a los números por el rayar frío de la tiza sobre el encerado". *(La arboleda perdida*,pág. 86). Rafael Laffón, a quien Alberti conoció en Sevilla en 1926, pensó en esponja y pizarra en *Signo + (Poemas)* (Sevilla, Colección "Mediodia", 1927, pág. 9):

En la pizarra
el signo + en yeso.
Y la esponja en la mano
para absorber, borrar, y luego...

EL PROBLEMA DEL PRÍNCIPE AZUL, LA BELLA DURMIENTE Y LA BRUJA MALA

El Príncipe Azul se entera de que a causa de una maldición de la Bruja Mala la Bella Durmiente esta sumida en un trance del que sólo un beso de amor puede sacarla. El lunes por la mañana decide visitar a la Bella Durmiente en su lecho, e instantáneamente se enamora de ella, así que decide despertarla con su beso. Pero sintiéndose obligado a apresar a la Bruja Mala no sabe cuál de las dos cosas hacer primero, de modo que piensa en decidir con una moneda: si sale cara despertará a la Bella Durmiente el lunes, y luego irá a apresar a la Bruja Mala. Si sale cruz, entonces le dará un beso muy flojito, justo para que se despierte por un rato, pero luego caerá dormida otra vez. Eso le dará el tiempo para apresar a la Bruja Mala, y regresar el martes para dar el beso definitivo a la Bella Durmiente y acabar de despertarla.

Tras besar a la Bella Durmiente el Príncipe Azul le explica los pormenores de su plan, pero no le dice qué día es ni si en la moneda salió cara o cruz. Cuando la Bella Durmiente se duerme sufre una amnesia total acerca de todo lo sucedido, de modo que en el caso de que saliera cruz y el Príncipe Azul regresara a despertarla de nuevo el martes, tendría que volver a explicarle todos los detalles, de nuevo sin decirle que salió en la moneda ni si es lunes o martes.

Supón que eres la Bella Durmiente. Te despiertas. El Príncipe Azul te da las correspondientes explicaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que en la moneda haya salido cara?

***

En el grupo de news "sci.math" se ha armado una buena polémica entre los partidarios de que la probabilidad de que haya salido cara sea 1/2, y los que defienden que es 1/3. Los primeros dicen que las explicaciones del príncipe no dan ninguna pista nueva y no pueden cambiar la probabilidad de “cara", que es 1/2 en principio. Los que creen que la respuesta es 1/3 dicen que los 3 días son equivalentes para la princesa y que sólo en uno de ellos había salido cara.

También se puede razonar estudiando los posibles resultados de apuestas entre la Bella Durmiente y el Príncipe (por ejemplo, si la Princesa recibiera \$1000 en caso de acertar, ¿qué le convendria decir que salió, cara o cruz?).

Miguel A. Lerma, 1999

LA CASA VOLANTE DE LC

> —Bien, suponga esta casa, tal como está, ubicada a unos pocos billones de kilómetros por encima de un planeta, y con ninguna otra cosa en las proximidades capaz de perturbarla: ¿por supuesto, la casa caería en dirección del planeta?
> El conde aprobó con la cabeza.
> —Por supuesto, aunque podría llevarle algunos siglos caer.
> —¿Y será todo el tiempo la hora del té? Dijo Lady Muriel.

Este comentario del propio Carroll a la escena de la primera *Alicia* en que ésta cae por el agujero, me intrigó siempre. ¿Tendría razón el conde? Al final me decidí a emprender los cálculos correspondientes, y he aquí los resultados.

Para fijar ideas, supondremos que el "planeta" es la Tierra. En cuanto a la distancia, ya que se habla de "unos billones de kilómetros", estaremos dentro de un orden de magnitud correcto tomando $5 \cdot 10^{12}$ km, o sea cinco billones[3].

Utilizaremos las siguientes constantes:

- Aceleración de la gravedad $g_0 = 9{,}806$ m/s^2
- Radio medio de la Tierra: $R = 6.371$ km $= 6{,}371 \cdot 10^6$ m

Llamaremos T al tiempo invertido por la casa en su trayecto, es decir, desde el punto inicial, situado a una distancia a del centro de la Tierra, hasta la superficie ésta.

Cuando la casa se mueve fuera de la Tierra partiendo con velocidad nula desde un punto situado a una distancia a de su centro, la velocidad viene regida por la ley de gravitación universal. Por consideraciones de potencial, fácilmente se deduce:

$$\frac{v^2}{2} = GM\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) \qquad (3)$$

Que puede escribirse:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2GM\,\frac{a-x}{ax}} \qquad (4)$$

Para resolver esta ecuación diferencial tomaremos la variable adimensional $x = x/a$, que corresponde a la elongación referida a la distancia inicial a. Resulta:

$$\frac{\sqrt{2GM}}{a^{3/2}}\,dt = -\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

---

[3] Los billones ingleses son como los nuestros; no así los americanos, que són sólo el equivalente a mil millones nuestros.

Seguidamente haremos el cambio $h^2 = \frac{x}{1-x}$, de donde $dx = \frac{2hdh}{\left(1+h^2\right)^2}$, y por tanto:

$$-\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = -\int\frac{2h^2dh}{\left(1+h^2\right)^2} = \frac{h}{\left(1+h^2\right)} - arctan h = \sqrt{x\left(1-x\right)} - arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$$

Determinada la constante C con la condición de que *x(0) = 1*, resulta:

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GM}}\left[\sqrt{x(a-x)} + a\cdot arctan\sqrt{\frac{a-x}{x}}\right] \qquad (5)$$

Para hallar el tiempo empleado en llegar hasta la superficie de la Tierra, bastará con hacer $x = R$, y recordando además que $GM = g_0R^2$, resultará:

$$T = \sqrt{\frac{a}{2g_0}}\left[\sqrt{\frac{a-R}{R}} + \frac{a}{R}arctan\sqrt{\frac{a-R}{R}}\right] \qquad (6)$$

Ha llegado el momento de efectuar sustituciones. Obsérvese que R es despreciable frente a *a*, y que el arco tangente de un número muy grande es prácticamente igual a π/2. Con ello, fácilmente obtenemos:

$$T = \sqrt{\frac{5\cdot 10^{15}}{2\cdot 9{,}806}}\left[\sqrt{\frac{5\cdot 10^{15}}{6{,}371\cdot 10^{6}}} + \frac{5\cdot 10^{15}}{6{,}371\cdot 10^{6}}arctan\sqrt{\frac{5\cdot 10^{15}}{6{,}371\cdot 10^{6}}}\right] \cong 6{,}224\cdot 10^{16}\,s =$$
$$= 1{,}9737\cdot 10^{9}\,años = 1{,}9737\cdot 10^{7}\,siglos$$

¡Esos “algunos siglos” son veinte millones de ellos! Realmente es muy difícil acertar a ojo con el orden de magnitud de las cosas, especialmente en Astronomía.

JMAiO, feb 2000

LA IMPLEXIÓN

La implexión es la concurrencia en la ascendencia de una persona de antepasados vinculados a su vez entre sí por lazos de consanguinidad. En principio una línea sin mezclas de antepasados debería estar formada por dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, dieciséis tatarabuelos, etc. En la vigésima generación ascendente habría 2^{20} personas, o sea 1.048.576. Es casi imposible que no se hayan producido en ese intervalo cruces entre personas vinculadas con algún grado de parentesco, de modo que en la práctica esa multitud será mucho menor.

Se llama "grado de implexión" en la ascendencia de una persona al porcentaje de "intrusiones" de generaciones distintas. Matemáticamente: el número de ascendientres real en una determinada generación dividido por el teórico.

Un ejemplo sencillo: si dos primos contraen matrimonio, resulta que ambos comparten un abuelo y una abuela común, conque la generación de los bisabuelos de los hijos de ese matrimonio no está formada por ocho personas, sino solamente por seis. Así, el grado de implexión será 2/8 = 0,25 = 25 %.

Pueden imaginarse casos más complejos. El hijo de un matrimonio entre hermanos consanguíneos, al estilo del antiguo Egipto, tendría un grado de implexión del 50 % (tendría dos abuelos en vez de cuatro). Y ese mismo grado se daría en el hijo de dos progenitores procedentes del matrimonio de dos hermanos con dos hermanas (tendría cuatro bisabuelos en vez de ocho).

Pero las "intrusiones" pueden haberse producido entre parientes de generaciones distintas. El caso más sencillo sería el de un tío casándose con su sobrina, caso en que el hijo de ambos tiene seis bisabuelos en lugar de ocho: la implexión es aquí del 25 %. Es la misma cifra que en el caso de primos hermanos.

La implexión puede llegar a valores mucho menores a lo largo de generaciones estudiadas. Por ejemplo, el rey Alfonso XIII de España tenía 111 abuelos novenos distintos en lugar de los 1024 que le correspondían. Es decir, que su implexión era del ¡89,16 %! O sea 1 – 111/1024).

Naturalmente, sólo será posible calcular la implexión cuando se disponga de una tabla total de ascendientes, lo que sólo suele ser factible en linajes reales. Y aun así queda la posibilidad de vinculaciones desconocidas entre los más temotos antepasados, lo que aumentaría todavía el valor.

Y es que de hecho el estudio teórico de la implexión tiene sentido solamente cuando se consideran generaciones no excesivamente remotas, pues, retrocediendo todavía más, forzosamente aparecerían implexiones entre los la de la última generación calculada.

Por ejemplo. Supongamos una comunidad aislada y endogámica formada por unas 1024 personas, cuyo número no varía en las distintas generaciones. Un sujeto puede tener una implexión como máximo de 1 si consideramos las 10 generaciones anteriores (hasta 1024 ascendientes). Pero si nos remontamos una generación más, en realidad la implexión es el 50 %, pues los antepasados teóricos son 2048, y los reales siguen siendo 1024. Y cuantas más nos remontemos, más subirá la implexión, conque en el límite, ésta sería del 100 %...

Josep M. Albaigès, Barna, dic 99

LA MARTINGALA, UNA VEZ MÁS

Se trata de un problema que no he podido aclarar desde hace años. Es una cuestión que me plantearon unos "profesionales" del juego. Estas personas viven de lo que ganan apostando en la ruleta en los casinos. En cierta ocasión me explicaron el sistema de apuestas con el que funcionaban, de manera que yo les pudiera explicar matemáticamente porqué ganaban y alguna manera de perfeccionar este sistema.
Cuento, por increíble que parezca, con que los croupieres son capaces de sacar casi a voluntad cualquier número en la ruleta. Cuento con que el casino no tiene permitido cambiar la ruleta de una mesa a otra, aunque lo hacen cuando les interesa; pero, prescindiendo de tales realidades, vamos a abordar el problema sólo matemáticamente.
Con el sistema de "LA DOBLA" se gana dinero realmente. Este sistema consiste en apostar una ficha al rojo. Si sale rojo he ganado una ficha y sigo apostando otra ficha. Si sale negro, doblo la apuesta, es decir, pongo dos fichas. Si volviera a salir negro, volvería a doblar, poniendo cuatro fichas, y así sucesivamente. De manera que basta que tan sólo salga una vez mi suerte para que recupere todo lo perdido y gane una ficha. De una manera general (sin considerar el cero) y explicándolo burdamente habré ganado tantas fichas como veces haya salido mi suerte. Matemáticamente este sistema resulta inviable, pues tengo la misma probabilidad de ganar que de perder y la probabilidad de ganar un millón sería de 1/1.000.000; pero el caso es que en la realidad funciona rentablemente. Tanto es así que en los casinos, sabiendo esto, está prohibido apostar de esta manera. De tal forma que fijan unos máximos por apuesta para que se corte la cadena de apuestas dobladas y no puedas seguir el sistema. Por tanto, vemos que, aunque matemáticamente no sea viable, el sistema es rentable.
El sistema de SUBE Y BAJA se basa en subir o bajar la apuesta en función de la suerte anterior que haya salido. Por ejemplo, si yo estoy apostando 3 fichas en el rojo, y sale rojo, la siguiente apuesta sería poner 2 fichas en el rojo y si hubiera salido negro, poner 4 fichas en el rojo. Resumiendo: cada vez que yo pierdo, incremento una ficha sobre la cantidad de fichas que he apostado antes; mientras que si gano, reduzco en una ficha el número de fichas que había apostado en la jugada anterior.
Vamos a analizar un caso fácil. Supongamos una serie de 100 tiradas en la que salieran 50 suertes a favor y 50 suertes en contra según el orden : Perder, Ganar, Perder, Ganar, etc.(abreviando: PGPGPGPGPG .....). Comienzo poniendo una ficha. Pierdo. Al haber perdido, pongo dos fichas ("subo" una). Segunda jugada. Gano. Ahora, al haber ganado apuesto una ficha menos que en la anterior ("bajo" una), es decir, una. Tercera jugada. Pierdo. Al haber perdido, subo una ficha, es decir, apuesto dos. Cuarta jugada. Gano. Etc.
En 50 jugadas habré ganado y en 50 jugadas habré perdido. Pero en las jugadas en las que he perdido había apostado 1 ficha y en las 50 jugadas en las que he ganado había apostado 2. Beneficio = Ganado - Perdido = (50x2) - (50x1) = 50. En la realidad no es tan fácil; pero nos sirve como modelo explicativo.
Vamos a analizar burdamente un caso más claramente negativo para nuestros intereses. Vamos a suponer un caso 47G y 53P, y para más INRI las veces que perdemos son las últimas jugadas en las que no nos da tiempo de recuperarnos. Es decir, desde la jugada 94 a la 100 hemos perdido las seis veces seguidas, apostando, lógicamente 1,2,3,4,5 y 6. O sea, que en las últimas jugadas habríamos perdido : 6+5+4+3+2+1=21. Pues bien, burdamente, sería : Beneficio=47-21=26.
¿Es esto así?. ¿Cómo se calcularía matemáticamente todo esto?. ¿Hay realmente una ventaja matemática?. Los sistemas, normalmente, se suelen basar en que el jugador no puede cambiar el valor del premio; pero sí el valor de la apuesta. En la realidad funciona rentablemente; pero matemáticamente... ¿sería demostrable?.

Roberto Herrera Pérez.

El viejo tema de la "Martingala" ha sido estudiado muchas veces en [C]. Por resumirlo brevemente, la táctica consiste en apostar una gran cantidad (todo nuestro capital, si sale una racha suficientemente larga) a cambio de un pequeño premio. La segunda versión de la martingala está atenuada, pero en lo fundamental es lo mismo (imagina que salen 10P antes de la primera G: has necesitado una banca de 3 + 4 + 5 + ... + 12 = 75 Pta. menor sin duda que las 1024 en el caso de doblar, pero también me va a costar mucho más recuperarlas).
Tus amigos se arruinarán sin duda a la larga. Todas las pesetas trabajosamente ganadas por este procedimiento se perderán en cuanto salga una racha suficientemente adversa. Y ésta va a salir sin duda, puesto que el juego requiere, para ganancias importantes, mucho tiempo de juego.
El sistema es comparable a si yo apuesto mi vivienda contra 1000 Pta, con una probabilidad de ganar igual a 0,9999. ¿Es un buen negocio? Ganaré casi seguro, y si apuesto unas pocas veces puedo esperar beneficio, pero a costa de haber sufrido un riesgo muy grave.

JMAiO

LOS NÚMEROS GRANDES EN LA ANTIGUA RUSIA

En la Rusia del siglo X los conocimientos y cálculos matemáticos prácticos económico-técnicos se escribían mediante el sistema de numeración decimal alfabético, semejante al sistema alfabético griego (advirtamos que esta numeración eslava antigua se utiliza aún en nuestros días en los libros eclesiásticos). En los documentos se encuentran a veces números muy grandes, para los cuales existen nombres especiales. En cálculo corriente es:

10^4 misterioso, más tarde, nebuloso
10^5 legión
10^6 leodro

En otro sistema, de cálculo "grande",

10^6 nebuloso
10^{12} legión
10^{24} leodro
10^{48} pila
10^{96} cuervo

Después de esto hay una inscripción simple que expresa: "No hay más que estos números".

K. Ríbnikov, *Historia de las matemáticas*, Ed. Mir, Moscú.
L.

PRACTICANDO EL PUENTING… SOBRE EL PAPEL

En la última cena mensista de Año Nuevo resultó que algunos de los comensales eran muy asiduos al puenting. Disfruté oyéndoles expresarse con entusiasmo sobre las sensaciones que les proporcionaba su amado deporte. Temo que el estado de mis articulaciones no me permita exponerme a practicarlo directamente, pero sí puedo ofrecer en estas páginas el resultado de mis elucubraciones matemáticas sobre el mismo.

Como es sabido, el puenting consiste en dejarse caer más o menos verticalmente desde un punto con sus bajos despejados (un puente es ideal), atándose previamente a los pies unas cuerdas elásticas. Agotado el recorrido en caída libre, éstas actuarán frenando la velocidad adquirida hasta conseguir la detención del arriesgado volador, lo que naturalmente debe tener lugar antes de alcanzar el suelo. La ulterior actuación elástica de la cuerda elevará el cuerpo del deportista y lo someterá a una serie de oscilaciones amortiguadas hasta su detención total. El resto, el izado, es cosa de sus compañeros.

El estudio físico del proceso requiere hacer unas consideraciones previas de tipo físico. Un cuerpo está sometido habitualmente a una fuerza igual a su peso, a causa de la aceleración de la gravedad ($g = 9{,}81\ m/s^2$). En el caso más sencillo, en que el cuerpo reposa sobre sus pies, las plantas de éstos transmiten al suelo una presión del orden de 0,25 kg/cm2. Los huesos del cuerpo soportan unas cargas debidas al peso de éste, el corazón bombea sangre a un ritmo de 80 latidos/minuto y una presión de 150 mm de mercurio hasta los últimos confines corporales, etc.

Pero imaginemos ahora que el cuerpo es acelerado (por un vehículo, por un ascensor, etc.). Según el principio de Newton, aparecerá una fuerza de inercia de magnitud igual a la masa del cuerpo por la aceleración transmitida, y los efectos consiguientes pueden llegar a ser peligrosos. Si, por ejemplo, la aceleración es el doble de la de la gravedad, la sangre se convierte en un líquido de densidad 2, que debe ser bombeada por el músculo cardíaco, no acostumbrado a este esfuerzo: la presión sanguínea aumentará y las pulsaciones se reducirán. Si el cuerpo reposa sobre una superficie (usualmente será así, pues el movimiento de ésta transmitirá la aceleración), sobre la planta de los pies o de la superficie de apoyo actuará un peso doble del habitual, lo que equivale a cargar con un peso suplementario de cuantía igual al propio.

Las dificultades aumentan si la aceleración es 3g, 4g, etc. de hecho estos valores marcan el límite de la resistencia del cuerpo humano antes de romperse los huesos o sobrevenir el colapso cardiaco. Un astronauta especialmente entrenado llega a resistir aceleraciones de 6g e incluso algo más, pero estamos ahí ante un límite físico que no se puede sobrepasar.

Todo esto quiere decir que la cuerda no debe ser demasiado rígida, pues en este caso el frenado que provocaría en el cuerpo reduciría rápidamente la velocidad de éste, o, lo que es lo mismo, lo sometería a una aceleración tan fuerte que la fuerza de inercia resultante sobre él sería catastrófica, triturándolo. Claro es que tampoco puede ser demasiado elástica, pues entonces el recorrido hasta el frenado total sería excesivo, perdiéndose el encanto del puenting.

Para fijar un poco las ideas, en una caída desde 30 metros de altura (un edificio de 10 pisos), se adquiere una velocidad de 24,26 m/s = 87,34 km./h. La detención de esta velocidad con una aceleración uniforme de 2g requeriría un tiempo de 1,23 segundos adicionales, durante los cuales se recorren 37,50 m más, valor francamente excesivo.

Pero esto es para una actuación uniforme. De hecho la aceleración negativa producida por la cuerda elástica no lo es, ya que arranca desde un valor cero al inicio del trayecto de frenado. Por otra parte, durante éste, la gravedad no deja de actuar.

Vamos a estudiar el proceso físicamente. A partir del momento en que el deportista ha caído la altura *h*, longitud del cable de salvamento, su velocidad, como es bien sabido, vale:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Recordando el principio de Newton, la ecuación diferencial que regirá el movimiento de frenado será:

$$my'' = -ky + mg$$

Que podemos escribir

$$y'' + w^2 y - g = 0$$

Como es habitual en el estudio de movimientos vibratorios, hacemos $w^2 = \dfrac{k}{m}$.

Pasaremos por alto las manipulaciones matemáticas que hay que hacer para resolver esta ecuación diferencial. De hecho, la solución es:

$$y = y_0 + a\,\mathrm{sen}(wt - j)$$

Donde las alturas y se han medido hacia abajo desde el punto de inicio del frenado (en adelante, PIF). Para la determinación de los parámetros y_0, a, j, es conveniente hallar antes otro parámetro intermedio α:

$$a = \sqrt{2gh + \frac{g^2}{4w^2}}$$

Los tres parámetros anteriores valen entonces:

$$y_0 = \frac{g}{2w^2}$$

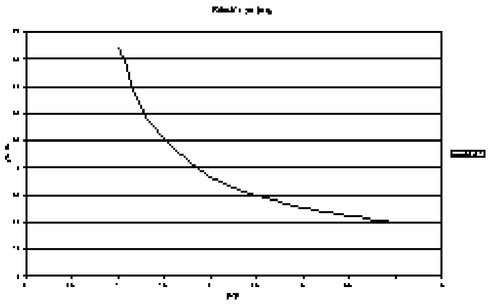
$$a = \frac{a}{w}$$

$$\operatorname{sen} j = \frac{g}{2aw}$$

En resumen: el saltador describirá un movimiento vibratorio armónico centrado en un punto situado y_0 más abajo del PIF. La amplitud de la oscilación valdrá a, y ésta tiene una fase inicial igual a -φ.

Lo que a nosotros nos interesa es la relación entre la aceleración máxima $j_m = aw^2$ que sufrirá el saltador (para mayor comunidad, utilizaremos el cociente j_m/g) y la altura $y_m = y_0 + a$ que recorrerá desde el PIF. Despejando entre las ecuaciones anteriores, se obtiene una relación un tanto complicda entre *jm* e *ym*, en la que ambas magnitudes varían en sentido inverso, como era de esperar.

Vamos a poner un ejemplo para ver con qué órdenes de magnitud nos las vemos. Sigamos con nuestro intrépido saltador a 30 m, donde empieza su PIF. Cada parámetro de frenada k supone una relación j_m/g y una altura y_m. Combinando ambas variables, se obtiene la gráfica:



Que demuestra que si quieren conseguirse alturas discretas (inferiores a 20 m, por ejemplo, es necesario que el saltador sufra importantes fuerzas de inercia.

JMAiO, dic 99

APÉNDICE MATEMÁTICO

Planteemos la ecuación así: $\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} + w^2 y - g = 0$

O sea: $v\dfrac{dv}{dy} + w^2 y - g = 0$

Integrando e imponiendo la condición de que para y = 0 sea $v = \sqrt{2gh}$, resulta:

$$v^2 = 2gh - w^2 y^2 + gy$$

Que puede ponerse así: $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 2gh + \dfrac{g^2}{4w^2} - \left(wy - \dfrac{g}{2w}\right)^2 = a^2 - \left(wy - \dfrac{g}{2w}\right)^2$

Donde se ha hecho $a = \sqrt{2gh + \dfrac{g^2}{4w^2}}$. Integrando y fijando las constantes de integración de modo que para *t = 0* sea *y = 0*, resulta:

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - \left(wy - \dfrac{g}{2w}\right)^2}} = \frac{1}{w}(\operatorname{arcsen}\frac{wy - g/2w}{a} - \operatorname{arcsen}\frac{g}{2aw})$$

De donde, finalmente: $\boxed{y = y_0 + a\,\mathrm{sen}(wt - j\,)}$

Siendo $y_0 = \dfrac{g}{2w^2}$; $a = \dfrac{a}{w}$; $\mathrm{sen}\,j = \dfrac{g}{2aw}$.

TERMODINÁMICA INFERNAL

Un profesor un poco cachondo de Termodinámica había preparado un examen para sus alumnos. Éste tenia una sola pregunta:

¿Es el Infierno exotérmico (emite calor); es endotérmico (absorbe calor)? Justifica tu respuesta.

La mayor parte de los estudiantes escribieron su respuesta basándose en la Ley de Boyle (el gas se enfría cuando se expande y se calienta cuando se comprime) o alguna variante.
Un estudiante, sin embargo, responde lo siguiente:

Primero, necesitamos saber como varía en el tiempo la masa del infierno.

Así, necesitamos saber la frecuencia con la que las almas entran en él y la frecuencia con la que salen. Opino que podemos asumir sin ninguna duda que, una vez que un alma ha entrado en el Infierno, ya no sale nunca más.

Así pues, no hay frecuencia de salida. Para calcular cuÁntas almas entran en el Infierno, tengamos en cuenta las distintas religiones que existen hoy en día en el mundo.
Algunas de estas religiones afirman que, si no eres miembro de ella, irás al Infierno. Debido a que hay más de una de estas religiones y teniendo en cuenta que una persona no pertenece a más de una religión al mismo tiempo, podemos afirmar que toda la gente y todas sus almas van al Infierno.

Con las tasas de natalidad y mortalidad llegamos a la conclusión de que el número de almas que ingresan en el Infierno crece exponencialmente.

Ahora miramos la variación del volumen del Infierno debido a que a la Ley de Boyle establece que, para que la temperatura y la presión en el Infierno permanezcan invariantes, el volumen de éste se tiene que expandir según se van añadiendo almas. Esto nos da dos posibilidades:

#1 Si el Infierno se expande a una velocidad más baja que la frecuencia a la que entran las almas, entonces la temperatura y la presión en el Infierno se incrementarán hasta que éste reviente.

#2 Por supuesto, si el Infierno se expande a una velocidad mayor que la frecuencia de entrada de almas, entonces la temperatura y la presión caerán hasta que este se congele.

Así pues, ¿cuál es la conclusión?

Si aceptamos el postulado que enunció mi compañera Rocío López en el primer año de carrera y que decía algo así como: "El Infierno se congelará antes de que yo me acueste contigo", y dado el hecho de que todavía no lo he conseguido entonces el enunciado numero 2 no puede ser cierto así que la respuesta es:

El Infierno es exotérmico.

Nota: El alumno obtuvo Matrícula

(Remitido por Javier G. Algarra)

UNA FRASE EN CASCADA

Es casi un axioma que toda frase célebre.... ya fue pronunciada más o menos, por alguien años o siglos antes.

Así hay frases atribuidas a Churchili- Napoleón, o Cesar Borgia.

Entre las más celebradas e ingeniosas paradojas , deL “marxismo” (de don Groucho), se cita eso de que no estaba dispuesto a ser socio de un club capaz de admitir socios como él.

Pues bien , he encontrado una frase parecida. Está contenida entre las divertidas máximas y diálogos breves de A. Chamfort (1740-94), en las que ridiculizó el *Ancien Régime*. Amigo de Beaumarchais, vivió peligrosamente las jornadas revolucionarias, se intentó suicidar para no ser guillotinado.... y finalmente murió en su cama.

Dice Chamfort, refiriéndose a una dama de dudosa reputación que se acababa de casar con un caballero, al parecer intachable, que otra señora dijo:

“Sí yo fuera una perdida aún sería muy honesta, porque jamás me casaría con un hombre capaz de tomarme por esposa"

¿Vale?.

J. A. E.

UNA SUCESIÓN INTERESANTE

Hace ya algunos años que, en el curso de un problema de Investigación Operativa en materia financiera, me topé con la siguiente secuencia numérica, obviamente indefinida:

10110101101101011010110110101101110..........

Esta secuencia tiene propiedades interesantes y está, como fácilmente se comprueba, estrechamente relacionada con nuestros viejos conocidos la Sucesión de Fibonacci y la Sección Aúrea.

Evidentemente no es periódica. ¿Quizás cuasi periódica, como las teselaciones del plano y cuasi cristales de Penrose? Lo más curioso es que no resulta fácil dar con su "ley de formación", en el sentido de dar respuesta a la pregunta ¿la posición n-sima es *cero o uno?,* a no ser que se tenga toda la sucesión entera desde el principio.

Por otra parte cualquier "trozo" de la secuencia se repite a lo largo de la misma de forma *cuasi periódica* (pero no periódica), siguiendo la misma secuencia de unos y ceros de la propia sucesión, que en este sentido podríamos calificarla de autorrecurrente. Ella misma es su propia "ley de formación", y se contiene a sí misma de forma indefinida, pero no periódica.

La representación gráfica es intrigante. Aconsejo un sencillo programa que en una cuadrícula a partir de un punto, siga la secuencia, por ejemplo cero a la derecha, uno a la izquierda o algo similar. Al cabo de muchas iteraciones la siguiente parece que repasa el trazado anterior, pero finalmente "sale" fuera un poco. Pregunta: ¿Llena todo el plano, o tiene un área límite?

NOTA: La forma más sencilla de obtener indefinidamente la secuencia es "soldando" a continuación de cada secuencia parcial la anterior:

1
10
101
10110
10110101
1011010110110
101101011011010110101...

Es también muy interesante la interpretación de estas secuencias como números binarios. Por cierto, ¿cuál es el límite del número "decimal" binario?:

0,10110 ....

José Antonio de Echagüe ("El personaje inexistente" ¿)

NOTAS A LA SUCESIÓN DE J. A. DE ECHAGÜE

Antes de empezar con el análisis de la secuencia de José Antonio conviene recordar algunas cosas sobre las sucesiones que llamaremos “fibonaccianas”. En ellas cada término, a partir del tercero, se forma como suma de los dos anteriores. La más simple (“Fibonacci” a secas) es la siguiente:

F = {1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89...}

Variando los dos términos iniciales obtenemos otras sucesiones del mismo tipo, como la de Lucas:

L = {1,3,4,7,11,18,29,47,76,123...}

Observemos que en las sucesiones iniciadas por dos términos consecutivos de alguna más sencilla reproducen ésta. Por ejemplo, la fibonacciana en que $u_1 = 1$; $u_2 = 2$, a la que llamaremos "Fibonacci decalada un paso".

Las sucesiones fibonaccianas tienen todas por término general:

$$F_n = a f^n + b f^{-n}$$

Donde α, β son coeficientes propios de cada sucesión, y ϕ es el número áureo, ϕ = (1+√5)/2 = 1,618... Por ejemplo, para la de Fibonacci es:

$$F_n = \frac{f^n - (-f)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

(En realidad, cualquier fibonacciana se reduce a la combinación de dos sucesiones de Fibonacci, pues si los primeros términos son 1, 1+α, la sucesión general es $f_n + \alpha f_{n-1}$).

El límite de la sucesión entre dos términos consecutivos de una sucesión fibonacciana cualquiera es $lim\ (u_n/u_{n-1}) = f$.

Pasemos ahora a la sucesión de José Antonio. La siguiente tabla recoge la formación de los primeros términos, si los consideramos expresados en base 2.

n	x_n (base 2)	x_n	F_n
1	1	1	1
2	10	2	2
3	101	5	3
4	10110	22	5
5	10110101	181	8
6	1011010110110	5814	13

En ella se ha llamado x_n al término genérico, y F_n al de la sucesión de Fibonacci ($F_0 = 1$; $F_1 = 1$; $F_2 = 2$...). Es evidente que el número de cifras de x_n (en base 2) es precisamente F_n, de las cuales F_{n-1} son unos y F_{n-2} son ceros. De ahí se concluye que el recinto por el que pregunta J. A. no existe, puesto que aunque el cociente entre el número de unos y ceros se mantenga aproximadamente igual a ϕ, su diferencia podrá ser tan grande como se quiera.

Fácilmente se deduce la ley de formación de la sucesión:

$$x_n = 2^{u_{n-2}} x_{n-1} + x_{n-2}$$

No hemos podido hallar ninguna fórmula sencilla no recurrente del término n-simo, y dudamos que exista. La sucesión crece muy rápidamente, de forma que dicho término es del orden de $2^{u_{n-1}}$. El límite entre dos términos consecutivos es $lim(x_n / x_{n-1}) = 2^{u_{n-2}}$. En cuanto a la sucesión del número decimal pedido, es también obvia la siguiente ley de formación:

$$y_n = y_{n-1} + 2^{-u_{n-1}} y_{n-2}$$

La sucesión $\{y_i\}$ es estrictamente creciente, y converge rápidamente hacia el número 0,7097167... Yo suponía este número trascendente, pero una consulta a Miguel Á. Lerma amplió considerablemente las conclusiones. Le cedo la palabra:

Por supuesto no sería realista esperar que ese límite se pueda representar mediante una combinación de operaciones algebraicas y radicales con números racionales o constantes usuales como π o e, pero sí admite una representación simple y elegante en forma de fracción cintinua:

$$y = \left[0;2^{F_0},2^{F_1},2^{F_2},\ldots\right] = \left[0;1,2,2,4,8,\ldots\right] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

No es difícil ver que en n-simo convergente de esa fracción continua es $c_n = x_n/(2F^{n+1}-1)$. Para ello basta usar las siguientes relaciones verificadas por los convergentes $c_n = p_n/q_n$ de una fracción continua $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$:

$p_0 = a_0$, $q_0 = a_1$, $p_1 = a_1a_0 + 1$, $q_1 = a_1$, (1)

Y para $n \geq 2$:

$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$ (2)

$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$

En nuestro caso $a_0 =0$, $a_n = 2^{Fn-1}$ $(n > 0)$. Los primeros convergentes, que se pueden obtener por cálculo directo, tienen ciertamente la forma indicada: 0, 1, 2/3, 5/7, 22/31,...

Por otro lado las ecuaciones (2) con $a_n = 2^{Fn-1}$ son recurrencias verificadas por $p_n = x_n$ y $q_n = 2^{Fn+1} – 1$, de donde se sigue por inducción que todos los convergentes tienen la forma indicada. Un detalle notable es que la sucesión qn se puede construir como x^n pero comenzando con $q_0 = q_1 = 1_{(2)}$, $q_2 = 11_{(2)}$, etc.

Una vez probado que $c_n = x_n/(2^{Fn+1}-1)$, falta demostrar que la fracción continua representa $y = \lim y_n$, es decir, que $c_n \to y$. En efecto, $y_n/c_n = 1 - 2^{-Fn+1} \to 1$, luego y_n y c_n convergen al mismo límite y.

Para terminar, observemos que podrían definirse infinidad de sucesiones análogas a la dada. Por ejemplo, la de la siguiente tabla:

n	x_n (base 2)	x_n	L_n
1	1	1	1
2	100	4	3
3	1001	9	4
4	1001100	38	7
5	10011001001	1225	11

En ella son aplicables consideraciones muy similares a partir de la sucesión de Lucas. El límite entre dos términos consecutivos es ahora $lim(x_n / x_{n-1}) = 2^{L_{n-2}}$.

Josep M. Albaigès & M. A. Lerma, enero 2000