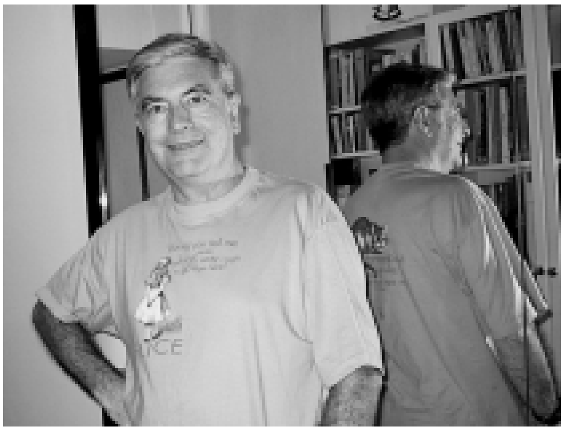


Carrollia

Nº 66, septiembre 2000

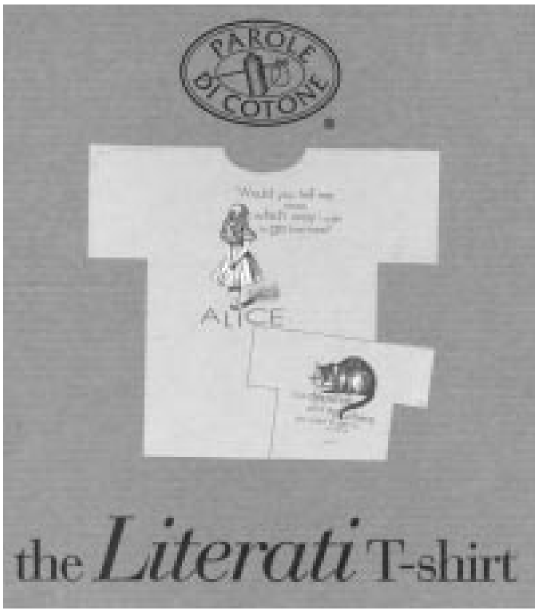
CARROLLIA

Dirección en la web: **www.ciudadfutura.com/juegosmensa/carrollia.html**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès **Francesc Castanyer**
e-mail: jalbaiges@caminos.recol.es



PORTADA: El viaje de novios de mi hija me aportó un agradable regalo: la camiseta aliciana, que algún avispado comerciante ha editado para deleite de los carrólogos. Por si interesa a alguno, ahí va la referencia.

SUMARIO

66

66 es una versión simplificada del 666, al que ya se dedicó un amplio comentario en el [B-22]. Es el undécimo número triangular, y aparece también en los números de Bernouilli:

$B_5 = 5/66$

Es imprescindible añadir una curiosa propiedad: la suma de sus divisores, incluido él mismo, es un cuadrado perfecto: 1 + 2 + 3 + 6 + 11 + 22 + 33 + 66 = 144. La secuencia de tales números con esa propiedad es 3, 22, 66, 70, 81...

También 66 es el número de sistemas iterativos cuyo orden es mayor que 3.

El 66 y el 67 son los primeros titulares de una curiosa propiedad aritmética:

$$\mathbf{6\cdot 7 = 42}$$
$$\mathbf{66\cdot 67 = 4422}$$
$$\mathbf{666\cdot 667 = 444222}$$
$$\mathbf{6666\cdot 6667 = 44442222}$$
……………………….

Se explica fácilmente ésta mediante la descomposición:

$$666\cdot 667 = 2\cdot 3\cdot 111\cdot 67 = 222\cdot 2001 = 444222$$

Los libros de la Biblia son 66: 39 en el Antiguo Testamento y 27 en el Nuevo.

Pero además el 66 posee otras muchas relaciones con la Biblia y otros libros sagrados: en Levítico 12,5 se fijan en 66 los días que la puérpera debe purificarse si ha dado a luz a una hembra. Es el año de la sublevación de los judíos, y en el *Ras-Samra* es contrapuesto al 77 al hablar de las ciudades conquistadas. Wierius establece en 66 el número de príncipes infernales inspirándose en el 666 apocalíptico.

En los juegos de loterías recibe, como todos los demás formados por dos cifras iguales, diversos nombre alusivos a esa propiedad: “las lombrices”, “las monjas” (abundando en este último tema, “las monjitas preñadas”, repetición del 6), “dos monjitas que van para Cádiz”, usado en Málaga, etc.

CORREO DESDE EL OTRO LADO DEL MUNDO

Queridos carrollistas:

Este verano hemos estado en California, donde aproveché para visitar a Sophia Karelse, antigua mensista española cuya simpática sonrisa recordarán los más veteranos: vive actualmente en Los Angeles, casada con el Dr. Arnold Felsenfeld. Podéis vernos en el campus de la UCLA, Universidad de Los Ángeles. La hospitalidad de ambos, que desde aquí agradezco una vez más, me hizo desear regresar pronto a esas doradas tierras.

Me llamaron profundamente la atención los contrastes californianos: entre los ubérrimos llanos agrícolas de Napa Valley o del valle de Salinas y la aridez del desierto de Mojave, entre la frenética colmatación de las autopistas siempre rebosantes y la tranquilidad de sus cómodas ciudades extendidas en la campiña, entre la vitalidad y el colorido del Chinatown de San Francisco y la intelectualidad de Berkeley y Stanford, entre la luminosidad de Los Angeles y la niebla londinense de San Francisco.

América siempre impone, empequeñece. Hemos visitado esos enormes parques naturales de Sequoia y Yellowstone, con árboles que existían ya cuando Sócrates tomaba la cicuta. Se sufren severos vértigos cuando el coche (elemento imprescindible en ese país) enfila los vertiginosos descensos de las calles de San Francisco. Pueden frecuentarse las urbanizaciones más lujosas del mundo (Monterrey, *'Monterey'* para ellos), las autopistas más repletas (llegué a contar ocho carriles de circulación por cada banda en una de ellas), y también gustar la comida-basura más deliciosa del mundo. Incluso quedó tiempo para visitar Las Vegas, monumento kitsch de imprescindible visita, testimonio como ninguno del poderío y la desmesurada escala estadounidense.

Aprovechando para una intrascendente incursión numerológica, es curioso que este número 66 de [C] llegue a continuación de este viaje a Estados Unidos, el sexto que he realizado a ese país en mi vida, donde, consecuentemente, he sido perseguido por la cifra 6. Empezando por los vuelos de la compañía KLM, que a la ida fueron el 1666 (Barcelona-Amsterdam) y el 603 (Amsterdam-Los Ángeles), pero a la vuelta el 606 (San Francisco-Amsterdam) y el 1667 (Amsterdam-Barcelona). En Los Angeles residí unos días en Santa Mónica (uno de los ayuntamientos de la conurbación), donde termina la carretera 66, inmortalizada por la novela del *beatnik* Jack Kerouac, *On the Road*, cuyo protagonista la recorría procedente de la 6.

En fin, no quiero hurgar más en detalles nimios, donde sin duda aparecerían más seises, como el automóvil que alquilé, con el que recorrí 1600 millas y gasté unos 60 galones de gasolina, conque pasemos ya a las cartas de nuestros amigos. Javier Serrano, un lector de la [C] electrónica, mandó esta pregunta:

Acabo de descubrir vuestra revista y no puedo sino plantearos un par de cuestiones por si son de vuestro interés. Una de ellas es que hace poco tiempo escuche en RNacional una reseña acerca de una polémica suscitada entre diferentes matemáticos acerca de lo que parece una nimiedad probabilística, como es la "clásica" elección de los concursos en los que el concursante ha de acertar a encontrar un regalo entre en tres opciones. Elegida una opción, el presentador descubre uno de las dos opciones rechazadas (resultando que éste no es el regalo). En este momento el presentador le da la opción de cambiar la opción elegida por la que queda y la pregunta es si, en términos de probabilidad le favorece o no el cambio o si le es indiferente. La información fue muy vaga, pero en cualquier caso me gustaría saber si conocéis el tema (si realmente existe o ha existido la polémica) y cual es el planteamiento correcto.

La segunda cuestión es acerca de una paradoja, creo que clásica, pero de la que no he escuchado explicación adecuada: un profesor asegura a sus alumnos que a la siguiente semana va a realizar un examen, y que este va a ser un examen sorpresa (pudiendo ser, en principio, cualquier ida de lunes a viernes, ambos incluidos). Un alumno sagaz razona del siguiente modo: el examen no puede ser el viernes, porque entonces ya no sería un examen sorpresa. Podría ser el jueves, pero como el viernes no puede ser examen sorpresa, si lo pone el jueves tampoco seria un examen sorpresa. Razonando del mismo modo, resulta que el profesor no podrá cumplir su máxima de realizar un examen sorpresa. Sin embargo la práctica es bien diferente. ¿Dónde reside el error de razonamiento?

Gracias por tu interés, Javier. El tema de la elección entre algo seguro o algo probable, que efectuamos continuamente, es el objeto del artículo *El problema de Monty Hall*, que se publica precisamente en este número de Carrollia.

En cuanto al examen sorpresa, cuando los alumnos, fiados en el razonamiento, no lo esperaban ningún día, tiene lugar el martes. ¡Con lo cual se cumple que iba a ser un examen sorpresa! Este problema, con otros muchos, fue incluido en mi libro *¿Se atreve Vd. con ellos?*

Como es bien sabido por nuestros lectores, existe un intercambio de suscripciones entre [C] y LINGUASIGNAL, la interesante y recomendable revista de lingüística que dirige Alan Turner en el Reino Unido. Es frecuente el intercambio de artículos entre ambas revistas, y a propósito del artículo de Mariano Nieto sobre los signos aritméticos publicado en [C-65], Alan escribió:

Thanks for sending another Carrolia.

Pierre Bouguer would have been surprised to see the Webdings attributed to him, and I can deduce what was intended (if they were the signs still in use). But could you clarify what should have appeared in place of the blank squares in the entries for John Wallis and Leonhard Euler?

Los duendes de la compatibilidad informática jugaron esta vez una mala pasada, transformando las expresiones de Mariano. Éstos son, correctamente escritos, los párrafos a los que alude Alan:

i e Σ • •

JOHN WALLIS (**1616-1703**) también utilizó el símbolo ∞ para designar infinito, aunque desde Viète hasta el siglo XVIII se utilizaba como símbolo de igualdad (deformación de la inicial de *æquale*).

PIERRE BOUGUER (**1698-1758**) introdujo los signos de "mayor o igual que" y "menor o igual que": • • .

LEONHARD EULER (**1707-1783**) introdujo el símbolo "**i**" primera letra de *imaginarius* para denotar $\sqrt{-1}$, la raíz cuadrada de menos uno; diversas notaciones trigonométricas; la letra "**e**" para la base de los logaritmos neperianos y la letra griega **Σ** como símbolo sumatorio.

Escribió también Jorge Viaña Santa Cruz, de La Plata (Buenos Aires, República Argentina), quien añade un nuevo ejemplo a la colección de capitales/países heterolíteras:

...mi país natal, Bolivia, cuya capital es Sucre.

Ésta sí que es buena; yo siempre había creído que la capital de Bolivia era La Paz, y a lo sumo veía empleada a veces una fórmula un tanto banal: Bolivia, dos capitales, La Paz y Sucre. ¿Qué es lo que distingue la capital de la sede de gobierno? ¿La residencia del cabeza de estado? Creo que ocurre lo mismo en otros países (Amsterdam-La Haya, Pnom Penh-Vientiane y alguna más). ¿Algún carrollista puede proporcionar datos?

Jorge manda también una bonita postal de la catedral gótica de La Plata, que ya en una ocasión apareció en estas páginas, y la fotografía de una de sus ventanales, todo ello ilustrativo de una exposición bibliófila. Muchas gracias como siempre. Realmente, nos resulta chocante ver edificios góticos a ese lado del océano, pero al fin y al cabo la fachada de la catedral de Barcelona apenas tiene un siglo. La pagó un prócer que deseó con ello comprarse una butaca en el cielo que hiciera olvidar su pasado esclavista.

Paisano de Jorge es Ricardo Isaguirre, quien manda otra de sus interesantes cartas:

Tengo en la memoria —en la facultad de mi alma, no en la máquina que me asiste como una sierva patrona— que mencionabas en tu carta como una lectura de alguno de los libros sagrados de la India, donde te sorprendía un episodio que trajo a tu mente la escena de la Anunciación. Los libros de las religiones tienen esas cosas. Lo que tiene el Cristianismo es un hecho histórico, la aparición de Cristo en nuestra historia humana, que por sus efectos se prueba y comprueba única. Hay estudios hermosos en la disciplina de las Religiones Comparadas que dan respuesta de lo que digo, y no hay religión, ni textos sagrados, más analizados que los de la Escritura. ¿Leíste tu texto indio —antes de lo "políticamente correcto" decíamos *hindú* sin que nos temblara la voz— en una edición crítica?

Sabrás que en la Argentina es hoy [25 de mayo] un día feriado, que conmemora la llamada Revolución de Mayo de 1810, ya independentista, y causada entre otros muy complejos factores, por la crisis de la monarquía española encarnada en la figura del rey Fernando VII, y por la repercusión de los sucesos peninsulares sobre los criollos de Buenos Aires —y sobre muchos españoles aquí entonces residentes—.

Volviendo al tema de la Anunciación en el *Ramayana*, no lo leí desde luego en ninguna edición crítica (supongo que para conseguirla haría falta entrar muy a fondo en la cultura hindú). Creo que determinados mitos van saltando en cascada de una a otra cultura y son recogidos, cómo no, por la mitografía de las religiones correspondientes (v. gr., el famoso del Diluvio Universal, que aparece ya en el *Gilgamesh,* o en el del hombre hecho con arcilla, en multitud de mitologías). Por supuesto que una religión no es responsable ni tiene por qué dar cuenta de todas las historietas que se tejen en torno a ella (de niño me contaban cada una que hoy me sonrío pensando en cómo abusaban de mi corta edad). Creo que lo que cuenta en una religión es su mensaje, lo que aporta para mejorar el género humano.

Ricardo aludía además en su carta a su quincuagésimo aniversario. Creo que en las Escrituras era la edad de la sabiduría ("¿No tienes cincuenta años y has visto a Abraham?", Jn 8,57). A mí no me hubiera importado pararme en ella, pero “el tiempo me desgasta, incesante”, como decía Borges. De niño vi la película *Pandora y el holandés errante*, y se me quedó en la memoria el verso del *Rubayat* con que empezaba:

Pero el Dedo, impasible
sigue y sigue escribiendo.
Detenerlo no podrás
con tu piedad o tu ingenio,
ni con tu llanto borrar
ni una coma, ni un acento.

Creo que el fatalismo es un error, pero algo hay que sí puede profetizarse: las huellas que el tiempo, "impasible", forjará en nuestra vida por el mero efecto biológico. Aprovecharlas o no es una cuestión nuestra. El tiempo transcurre tanto si lo aprovechamos como si no.

Mariano Nieto, de Madrid, manda unos sabrosos comentarios sobre sus artículos:

El articulillo sobre el **Tartaja** me vino a la pluma a raíz de la lectura de ***El teorema del loro,*** libro de trama de aventuras un tanto descabelladas con una urdimbre matemática que resulta de lectura agradable; conozco al menos dos personas a quienes también les ha gustado. Otra de mis recientes lecturas ha sido ***The lenguage of Mathematics. Making the invisible visible***, de Keith Devlin autor que me encanta y del que ya había leído ***Mathematics: the new golden age***.

Gracias por tus esfuerzos por tratar de explicarme la solución de "el defecto del cable telefónico". Siguiendo tus instrucciones casi me enredo yo mismo con el cable... Puedes tener la seguridad de que en mi próximo viaje a Barcelona (que espero sea dentro de poco) me llevaré un cable "defectuoso" con el que te pondré a prueba. Yo he descubierto otro sistema de desfacer el entuerto pero, como diría Fermat, el margen de esta carta no da de sí para exponerlo.

Hace años que pertenezco a **Hispania Nostra**, una asociación para la conservación y el fomento del patrimonio cultural. Un par de veces al año esta asociación suele organizar un viaje que sirve para confraternizar y ver algún que otro monumento. En la última ocasión estuvimos por la provincia de Toledo visitando los mosaicos recientemente descubiertos (aún no son visitables por el público) de una fastuosa villa romana (S IV) en **Carranque**. Luego en **Consuegra** vimos sus molinos y el castillo. Finalmente, tras comer en **Los Yébenes** (en su Sierra y en los **Montes de Toledo** se cazan al año más de 6.000 venados que en su mayoría se los comen en Alemania; hay camiones frigoríficos que los transportan rápidamente a ese país) nos acogieron los inquilinos del castillo de **Orgaz** y visitamos la bella iglesia que diseñó **Churriguera** de una riqueza arquitectónica que contrasta con la pequeñez del pueblo.

Hace poco conocí también a un profesor de matemáticas, amigo de una sobrina mía, profesora de ciencias físicas en el I. Ramiro de Maeztu. Se llama **Santiago Gutiérrez**. Tiene una colección de sellos interesantísima de tema matemático: personajes, figuras geométricas, fórmulas, símbolos, en fin todo lo que huela de cerca o de lejos a esa ciencia. Publicó, con ocasión de las VII Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas, un librito titulado ***Las Matemáticas en los sellos de correos***. En plan didáctico tiene una colección de sellos de matemáticos célebres, ampliados a tamaño de un cartel, a todo color, con la correspondiente biografía de cada uno, que ha exhibido por varios sitios (yo la vi en el reciente evento "Madrid por la Ciencia" que se celebró en la Casa de Campo).

Aprovechando el puente de primeros de Mayo hicimos, con los compañeros del Colegio de Minas de Levante, un viaje a Chequia donde ya estuvimos hace 10 años. **Karlovy Vary** (Karlsbad) nos encantó tanto por su frondoso paisaje como por su urbanización y balnearios de aguas termales. Se nota que los tiempos del comunismo van quedando atrás. En Praga pudimos entrar en la iglesia de **Tyn,** que ha estado en restauración durante años, para ver la tumba de **Tycho Brahe**, está en el presbiterio a la derecha del altar mayor, frente a ella, casi de espaldas a los fieles, hay una lápida con su efigie en bajorelieve y una leyenda, crucé una pequeña verja para poder fotografiarla pero apareció un sacristán que me expulsó como el ángel a Adán del Paraíso. Creo que al cumplirse su cuarto centenario exhumaron el cadáver, todos esperaban que apareciese su falsa nariz de oro pero resultó ser de cobre enmohecido...

Es curiosa esa manía humana de exhumar cadáveres. Tu comentario me ha recordado la obsesión de la escritora Delia Bacon (1811-1859), autora de la leyenda en torno a la *auténtica* autoría de las obras de Shakespeare, que ella atribuía a Sir Francis Bacon (con quien no tenía ninguna relación de parentesco) y otros “conjurados”. La tenacidad de esa mujer consiguió el permiso para exhumar al ilustre autor inglés, en cuyo cadáver iban a encontrarse pruebas irrefutables de su teoría. Perpetrado el desentierro, todo siguió como siempre, lo que no fue óbice para que ella siguiera erre que erre con sus elucubraciones hasta la muerte, sobrevenida en pleno acceso de locura. El caso es, sin embargo, que la descabellada teoría ha llegado hasta hoy, y todavía muchos creen en ella.

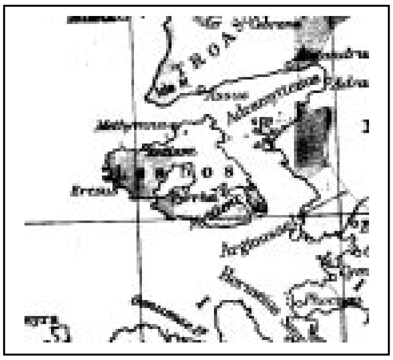
Mariano incluía además dos problemas, *El obtusángulo ataca de nuevo* y *Reparto equitativo,* que hallaréis en esas páginas, con mis comentarios.

Dio señales de vida desde Rijswijk (Holanda), después de mucho tiempo, José Beltrán Escavy, nuestro viejo JFN, quien en todos estos años aprovechó para residir en Japón, Moscú y perfeccionarse en informática. JFN es uno de los lectores que descubrieron la broma del mapa “ incoloreable” publicado en [C-65]. Decía:

Gardner reconoció que el mapa en cuestión lo había puesto como inocentada del 1 de abril (día de los Inocentes en USA): el mapa es perfectamente coloreable con 4 colores.

Te mando un pequeño acertijo que, por sorprendente que parezca, desconcierta al 90 % de la gente al que se lo propongo. Ahí va:

En la oficina en la que trabajo (Oficina Europea de Patentes) hay un colega, varón, examinador de patentes como yo, del que se puede decir sin lugar a dudas quie es lesbiano. Explicar cómo es esto posible.



Respuesta: Muy simple: este chico es griego, natural de la isla de Lesbos. Un *scan* de la página relevante del DRAE en que se habla de ella se puede encontrar en la URL:

http://pheme.rae.es/BUSCON.IMG/50/880.GIF

Desde luego conocía la broma de Martin Gardner, que apareció con otras más igualmente chocantes en 1974, y me permití trasladarla a los lectores de [C]. En cuanto al acertijo lesbiano, es también muy conocido que Safo era de la isla de Lesbos, de donde el gentilicio se trasladó, para desesperación de los naturales de la isla, a las aficionadas al mismo sexo (traslación análoga a la de 'sodomita', por Sodoma, en la Pentápolis). Por ello es preferible el gentilicio “lésbicos”.

Escribe Javier García Algarra, de Madrid:

Hace unos años en Mensa España existió un GIE de Esperanto (creo que se llamaba KLUBO). Me permito recomendar una curiosa página que trata no sólo de este idioma inventado sino también de otros mucho menos conocidos:

http://perso.wanadoo.es/rodoval/lenguas.html

Efectivamente, existió KLUBO, y por lo que recuerdo duró sólo uno o dos números. He visitado la página, en la que me ha sorprendido no hallar ninguna referencia al volapük, el primero y más famoso de los lenguajes artificiales (anterior al esperanto, por el que finalmente fue desbancado). Se habla sobre todo de los modernos, algunos ya tratados en [C]: klingon, 2000, etc. Aprovecho para actualizar una antigua colaboración mía sobre el tema, que encontraréis en el presente número.

También hubo, pese al verano, activa correspondencia con Miguel Á. Lerma, actualmente en Chicago. A propósito de una consulta sobre los cubos e hipercubos mágicos, contestó:

Los únicos avances significativos que he visto en el tema de cuadrados y cubos mágicos son demasiado sofisticados para una revista de divulgación (recuerdo uno en el que se usaban propiedades de números p-ádicos). También se han encontrado algunos resultados con ayuda de ordenador; por ejemplo se sabe que el numero de cuadrados mágicos de orden 1, 2, 3, 4, 5 es: 1, 0, 1, 880, 275305224. El numero de los de orden 6 se estima en 1,77 x 10^19.

El libro de Andrews sobre cuadrados y cubos mágicos sigue siendo un clásico, pero se han escrito otras obras sobre el tema. Hay una lista de referencias al pie de la siguiente página de Internet:

http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html

Esa página trae un buen resumen del estado del arte sobre el tema.

Fue una sorpresa tan grata como inesperada recibir carta de Gianfranco Bo, de Génova (e-mail: gfbo@libero.it), quien mantiene una página electrónica similar a la de **Carrollia**. Dijo Gianfranco:

Yo soy un profesor de Matemáticas y Ciencias y enseño en la *Scuola Media* en Italia.

Me ha gustado mucho la colección de problemas originales y acertijos publicada en el sitio CARROLIA.

Yo estay construyendo mi página web personal en lengua italiana dedicada al lado divertido de las Matemáticas. El URL es: http://digilander.iol.it/basecinque.

Le estoy escribiendo para preguntarle si Ud. puede permitirme:

1) Insertar en mi página web un LINK a su página web con una muy breve descripción;
2) Traducir y reformular en lengua italiana algunos problemas que se encuentran en las páginas web de CARROLIA e insertarlos en mis páginas citando tambien el nombre del autor.

Le agradezco mucho su atención y en espera de sus noticias le saludo muy cordialmente.

Desde luego el permiso fue concedido, y espero que el intercmbio entre ambos números sea fructífero, como lo es con el Snark y otras páginas similares. Gracias por tu interés, Gianfranco.

También envio sus habituales colaborciones numerológicas Antonio Cebrián, de Sagunt (València), y Antonio Casao también mandó interesante material:

Te hago llegar los enunciados de una serie de problemas que han ido poniendo en las Olimpiadas Matemáticas, en la fase local. Quizás haya alguno suficientemente interesante como para que lo propongas en *Carrollia*.

Mi amigo Carlo Frabetti, que dirigía una página sobre Matemáticas Recreativas en la desaparecida revista " Algo ", ha publicado dos libros sobre este tema, en Alfaguara. Uno de ellos se titula *Alicia en el país de los números*; el otro, *Malditas matemáticas*. Yo no los he visto y, por lo tanto, no he podido comprarlos. Quizás sean problemas clásicos, no lo sé. Supongo que podrás ojearlos en alguna buena librería de Barcelona y decidir. Yo procuraré hacer lo mismo.

Gracias por el material, Antonio. Veré si en la *rentrée* de septiembre localizo los libros.

Y llegó ya el final, amigos. Multitud de colaboraciones esperan su sitio, siempre desgraciadamente escaso. Les doy paso sin esperar más.

JMAiO

NOTAS SOBRE EL CALENDARIO

Los antiguos romanos empezaban el año con la primavera y dieron al primer mes el nombre de *Martius* , **Marzo,** el dios de la guerra; seguían **Abril**, cuya etimología pudiera proceder del latín **aperio** "el mes en que se abren las cosas"; **Mayo**, de etimología problemática, que quizá signifique "**crecimiento**" y **Junio** evidentemente el mes dedicado a **Juno,** la diosa protectora de la familia.

Seguían los meses de *Quintilis, Sextilis, September, October, November* y *December* es decir 5º, 6º, 7º, 8º, 9º y 10º. Según una antigua leyenda, **Numa Pompilio**, el segundo rey de Roma, añadió otros dos meses, *Ianuarius* y *Februarius*. En algún momento el Año Nuevo se trasladó, por razones administrativas, al 1 de enero. **Enero** toma su nombre de **Jano**, el dios bifronte que mira simultáneamente al año que termina y al que empieza. **Febrero** deriva del latín *februus*, que significa "purificador", porque en este mes se celebraban las fiestas *lustrales* (lustrar equivale a purificar). Febrero era considerado de influencia nefasta por eso los romanos lo convirtieron en un mes corto.

En tiempos de **Julio Cesar,** reformador del calendario, y en su honor, se cambió el nombre de *Quintilis* por el de **Julio** y para complacer a su sucesor, el emperador **Augusto,** nombrado cónsul por primera vez en *Sextilis*, se dio a este mes el nombre de **Agosto.**

El control del tiempo era prerrogativa del clero que debía fijar las fechas de diversas festividades. Desde este punto de vista religioso, entre los romanos eran importantes las **calendas** o primer día del mes, los **idus** que correspondían al día **15** de marzo, mayo, julio y octubre, y al **13** de los demás meses y las **nonas**, el día 7 de marzo, mayo, julio y octubre, y el **5** de los demás meses.

Julio Cesar decide reformar el calendario y conserva el 1 de enero como inicio del año. Para ello se asesora del astrónomo de Alejandría **Sosígenes**. El nuevo calendario llamado *Juliano* tenía ciclos de cuatro años, los tres primeros de 365 días y el cuarto de 366. Este día extra se añadía al mes de febrero, que cada 4 años debía tener 29 días en lugar de 28. El día a intercalar venía a repetir el sexto día antes de las calendas de marzo, o sea el 24 de febrero: llevaba entonces el nombre de *bis sextus dies ante calendas Martias*. A este año se la llamaba *annus bissextilis* de donde procede *año bisiesto*.

El llamado año trópico (de un solsticio invernal al siguiente solsticio invernal) dura **365** días, **5** horas, **48** minutos y **45,66** segundos; el año juliano duraba **365** días y **6** horas, esto dio lugar a que cada año juliano se anticipaba unos **11** minutos con respecto al sol, es decir, en **128 años** el año juliano se anticipaba **un día** entero al año trópico. El año **1582** d.C. se llevaban ya 10 días de adelanto desde el **325** d.C., año en que la Iglesia Católica, en tiempos del emperador **Constantino**, y tras el primer Concilio de Nicea, adaptó sus festividades religiosas al calendario juliano. La Iglesia se dio cuenta de que, si las cosas seguían así, llegaría a celebrase la Navidad en primavera y la Pascua en pleno verano.

Instado por el **Concilio de Trento**, el papa **Gregorio XIII**, asesorado por el astrónomo alemán **Cristoforo Clavius**, decretó que el **5** de **octubre** de **1582** pasase a ser el **15** del mismo mes y así el calendario fue nuevamente a la par con el sol. Pero para evitar que el incidente se repitiese con el transcurso de los años, Gregorio XIII introdujo un cambio en el ciclo de los años bisiestos; en adelante serían bisiestos los años cuyas dos últimas cifras fueran divisibles por cuatro, pero no cuando ambas fuesen cero, a no ser que el número constituido por la totalidad de las cifras del año sea divisible por cuatro. Por ejemplo 1956 fue bisiesto, ya que 56 es divisible por 4; pero no 1900 pues al terminar en 00, el número 1900 debería ser divisible por 4 y no lo es. El próximo año 2000 , según esto, será bisiesto. Se suprimían así tres años bisiestos cada 400 años. Este nuevo calendario recibe el nombre de *gregoriano* y es el empleado por todo el mundo occidental. Aunque se adapta mejor al año trópico, el error acumulado llega a ser de **1 día** cada **3.400 años**.

Como curiosidades diremos que el calendario gregoriano no fue unánimemente aceptado por la Europa de la época, una de las voces disidentes fue la del matemático francés **Viéte** impulsor de la notación simbólica en el álgebra. **Dinamarca** y la **Alemania** protestante lo adoptaron en el **1700**, mientras que **Inglaterra** resistió hasta el 2 de septiembre de **1752** unos dos siglos más tarde y a costa de graves desórdenes. En **China**, que usaba un calendario lunar, fue introducido en **1911** con la llegada de los comunistas. **Rusia** decidió adoptarlo tras el fin de la primera guerra mundial en **1918** y **Grecia** lo hizo en **1923**. El mundo científico recompensó la labor de Clavius dando su nombre al mayor cráter de la Luna.

Anotemos, para terminar, que la fácil observación de la luna con sus fases, dio lugar a los calendarios lunares, que siguen en vigor hoy día en algunos países. El mes lunar o *sinódico* - de una luna nueva a la siguiente - dura aproximadamente **29 días y medio**. El actual calendario musulmán es muy primitivo; consiste en 12 meses lunares. El calendario hebreo es de tipo luni-solar y resulta complicado.

Aristogeronte.

Calendas.doc Madrid a 22 de octubre de 1999 del calendario gregoriano.

Bibliografía:

Los Romanos y sus Dioses. R. Ogilvie.
Enciclopedia Larousse.
L'orologio su cui viviamo. Isaac Asimov.
Historia de la matemática. J. Argüelles.

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

Abundan cada vez más esos concursos sádicos en que, el cuanto el concursante ha ganado un premio, el perverso *showman* le ofrece cambiarlo por otro, añadiendo dinero además.

Una forma simplificada de este problema de decisión es el problema de Monty Hall, publicado en *The American Mathematical Monthly* (enero 1992). Se plantea así:

Un showman de la TV te da a elegir entre tres enormes cajas numeradas iguales. Una de ellas contiene un coche, y las otras están vacías. Pero, independientemente delo que hayas elegido, el showman (que conoce el contenido de cada una), antes de que veas tu caja abre una delas otras dos, que resulta estar vacía, y te ofrece la posibilidad de cambiar tu elección. ¿Te sale a cuenta hacerlo?

La respuesta es que es conveniente cambiar. Se comprende fácilmente observando que 1/3 de las veces habrás elegido correctamente la primera vez, y cambiar sería un error. Por lo tanto los 2/3 de veces ganarás el coche.

La estrategia es rentable incluso aunque no siempre el locutor abra la caja tras tu primera elección. El hecho de cambiar mejora siempre tus posibilidades de 1/3 a 2/3. Sólo no habría que hacerlo cuando el locutor es “perverso”, es decir, cuando te induce a cambiar basándose en que sabe que has elegido bien la primera vez.

JMAiO, jun 00

BREVE NOTA SOBRE EL ALFABETO LATINO

Para algunos, el alfabeto latino fue recibido directamente de los griegos en su colonia de Cumas en Campania, para otros fueron los etruscos quienes actuaron como intermediarios. La inscripción latina más antigua se ha encontrado en un fragmento de cerámica de Gabii en el Lacio de 800 aJC.

Inicialmente constaba inicialmente de 20 letras: A B C D E F H I K L M N O P Q R S T V X con valores distintos a los actuales, en ocasiones de forma marcada. La C sonaba siempre como la actual K ante cualquier vocal, una K articulada en la parte delantera del paladar como en /kilo/, mientras que la Q era gutural, como en /cuatro/.

Las letras **G Y Z** fueron añadidas más tarde en la antigüedad, respondiendo a distintas novedades articulatorias. La más importante fue la existencia de la C sonora, sonido que los romanos consideraban plebeyo, pero que fue imponiéndose (obsérvese que la G no es más que una C modificada). Análogamente, la Z correspondía a la sonorización de la S, y la Y respondía a la consonantización de la I.

Más tarde, en la Edad Media, fueron adoptadas la **U** y la **W**. La primera marcaba una distinción entre el sonido V, diferenciando sus valores vocálico (como en PLVS VLTRA) y consonántico. La W, posterior, respondía a una reconsonatización de la U similar a la de la I/Y.

Todavía más tarde fue adoptada la **J**, llamada "I holandesa", simple variante gráfica en principio de la I, pero que resultaría de mucha utilidad para representar diversos sonidos. En general, tiene el valor /zh/ o j francesa, pero en castellano representa la /h/ gutural fuertemente aspirada , en las lenguas eslavas una variante de I, etc.

Otras evoluciones fonéticas dejaron el alfabeto intacto, pero obligaron a extraños convenios de pronunciación: así, al perderse la oclusividad de la C ante E, I (vocales anteriores), el sonido C difiere del original ante esas vocales. Similarmente ocurre con GE, GI. En cambio, la relajación de la U en palabras como GUERRA, convirtió esa vocal en muda (aunque no en italiano). Se operaron monoptongaciones, que asimilaron AI = E (francés), AW = O (inglés), IE = I (aelmán), etc. En algunas lenguas, como español y catalán, han convergido los sonidos B/V, K/Q. En alemán ocurre otro tanto con V/F, en el español de Sudamérica con S/Z, etc.

Muchas lenguas adoptaron nuevas variantes de las letras latinas para representar sus propios sonidos: el castellano la **Ñ** (n mojada), el catalán y el francés la **Ç** (en la Edad Media, TS, hoy S), el alemán la **ß**, que no es más que una aglutinación de la doble S, el danés la **Ø** y el sueco la **Å** (variaciones de la O), etc.

Además, muchas lenguas observan el convenio de dar un determinado sonido a ciertos grupos de letras (pensemos en la **CH** castellana e inglesa, la **NY** catalana, la **GN** francesa, etc. etc.). Y todo ello sin hablar de los numerosos signos diacríticos que complican más todavía el bosque de los "alfabetos postlatinos".

Desde un punto de vista exclusivamente fonético, lo natural sería que cada lengua dispusiera de su propio alfabeto, y el latino debe ser violentamente retorcido para ajustarse a cada caso. Pero las ventajas comunicativas de emplear un solo alfabeto son obvias, por lo que la complicación actual sigue soportándose en aras de una mayor facilidad comunicativa.

Josep M. Albaigès
Barcelona, julio 2000

MÁGICOS CUADRADOS MÁGICOS

¿Quiere dárselas de mago con poco trabajo? Muy bien, apunte en un papel el siguiente cuadrado mágico incompleto:

	1	12	7
11	8		2
5	10	3	
4		6	9

Seguidamente, pregúntele a algún amigo/a (de más de 20 años) su edad. Llame N a ese valor menos 20 y rellene los cuadros vacíos con estos valores:

N			
		N-1	
			N+2
	N+1		

¡Observe que en el cuadrado resultante suman la edad todas las filas, columnas, diagonales e incluso el cuadrado central!

Por ejemplo, sea 34 años la edad. Será N = 14, y el cuadrado:

14	1	12	7
11	8	13	2
5	10	3	16
4	15	6	9

Y ahora, como carrollista, ¿puede Vd. decirme el secreto de este cuadrado?

JMAiO, junio 2000

CRONOLOGÍA
EN EL GRAN TEOREMA FERMAT (GTF)

1635. Fermat observa que 26 está entre un cuadrado (25) y un cubo (27). Busca más números con esta característica sin hallar ninguno. Conjetura que 26 es el único y termina encontrando una solución que no publica (muchas de las demostraciones de Fermat son incompletas, en ellas los cálculos suelen estar sólo esbozados; una vez hechos, las tira).
Mientras estudia el *Libro II de Arithmetica* de Diofanto de Alejandría (hacia 250 dJC) se sorprende de que haya infinitas ternas pitagóricas, pero, aparentemente, ninguna solución para la ecuación $\mathbf{x^3 + y^3 = z^3}$. Rápidamente generaliza el problema: *¿Tiene soluciones enteras no triviales la ecuación* $x^n + y^n = z^n$ *para n>2?*
Escribe una nota al margen del libro en la que afirma: "*He hallado una solución verdaderamente remarcable, pero el margen de este libro es demasiado estrecho para contenerla*".

1670. El hijo de Fermat publica todas las observaciones (48) de su padre en el *Libro II*. Éstas son, de hecho, teoremas extraordinarios y los matemáticos van hallando sus demostraciones, sólo esbozadas o incluso silenciadas por Fermat.

1742-49. Euler consigue demostrar un teorema muy importante: "Si un número primo es d ela forma $4m + 1$, entonces es suma de dos cuadrados, pero no si es de la forma $4m – 1$".

1753. Inspirándose en el método d edemostración del caso n = 4 que había esbozado ligeramente Fermat, Euler demuestra el caso n = 3 y rehace la demostración para n = 4. Los casos n = 3k y m = 4k quedan automáticamente demostrados.

1795. Sophie Germain da una nueva idea de demostración para los casos en que n es primo y 2n + 1 también, pero no la desarrolla en detalle.

1825. Dirichlet y Legendre, independientemente, demuestran el caso n = 5 utilizando el método esbozado por S. Germain.

1839. Lamé demuestra el caso n = 7, también con el método de S. Germain.

1847. Lamé y Cauchy anuncian independientemente que han demostrado el teorema.
Pero justo antes de publicarlo oficialmente, Ernst Kummer descubre un error en la idea general de la demostración y publica los argumentos y cálculos correspondientes. Lamé y Cauchy aceptan la argumentación de Kummer y paran la publicación.

1908. Paul Wolfskehl, cuando iba a suicidarse, descubre un error en los cálculos de Kummer, pero consigue corregirlo: la línea argumental general de Kummer continúa siendo correcta, y por tanto, la argumentación de Cauchy, falsa. Como consecuencia, Wolfskehl se abstiene del suicidio, y en su testamento establece un premio de 100.000 marcos para quien demuestre el GTF. La fecha límite es 2007.

1954. Taniyama y Shimura establecen una conjetura sobre unas ecuaciones denominadas elípticas, de gran trascendencia en la matemática, pero confiesan carecer de su demostración.

1984. Frey anuncia que la conjetura de T-S impica el GTF, que así vuelve a ser tomado en consideración. Poco después se descubre una inconsistencia en la demostración de Frey que la invalida.

1986. Ken Ribet y Barry Mazur modifican la demostración de Frey y confirman su conclusión: la conjetura de T-S implica el GTF.

1986. Andrew Wiles empieza a trabajar en la demostración de la conjetura T-S, solo y en secreto: "*Para llegar a una nueva idea hace falta un largo período de concentració n intensa en el problema, sin distracciones ni interferencias. Después, en el trascurso de la relajación, surgen las intuiciones*".

1988. Miyaoka anuncia una demostración del GTF a la que se da gran publicidad. Pero pronto se descubre un error en ella: el GTF continúa incólume.

1989-91. Wiles, utilizando la teoría de grupos de Galois (1832) y mediante nuevas técnicas (métodos de Iwasawa y de Kolyvagin-Flach), convenientemente modificadas y adaptadas, avanza espectacularmente en la demostración de la conjetura T-S, pero queda encallado en un paso crucial de la demostración.

1991-93. Wiles pide la colaboración de Nick Kantz, un experto en las técnicas K-F. La extraordinaria complejidad del trabajo de Wiles, junto con el deseo de mantenerlo secreto, les sugiere programar un cursillo para estudiantes al que asiste Kantz, en calidad de observador pero con el objetivo de revisar las demostraciones. Los estudiantes van abandonando y pronto quedan solos Wiles y Kantz.

1993. Wiles, con la colaboración de Nick Ikantz, programa tres conferencias en Cambridge, en la última de las cuales (23 de junio), y ante un auditorio de unos 200 matemáticos, acaba la demostración de la conjetura T-S, y por tanto del GTF.
En el proceso de revisión del manuscrito para su publicación, el mismo Kantz descubre un escollo en la demostración que Wiles no puede superar: la demostración no está completa y Wiles no publica el manuscrito pese a que casi todos sus capítulos son trabajos de primerísima fila. En un desesperado intento de salvar la demostración, se encierra nuevamente a trabajar.

1994. En abril se hace público un e-mail donde se afirma que N. Elkies ha hallado una solución de la ecuación de Fermat. Wiles queda hundido, pero se trata de una inocentada (el e-mail es del 1 de abril).
En otoño, y tras un trabajo intenso, Wiles establece una nueva técnica que, esencialmente, es una combinación de los métodos de Iwasawa y de K-F, los cuales, por separado, no permitían la demostración de la conjetura de T-S.

1995. Wiles vuelve a presentar el artículo (130 páginas) a revisión y ya no hay duda: la demostración es correcta y el artículo es publicado finalmente. El GTF está demostrtado 360 años después de su primera formulación y 325 de su publicación.

1997. Wiles recibe el premio instituído por P. W. El 27 de junio; la cifra es de 50.000 dólares.

Josep M. Lamarca
Profesor de Matemáticas
(Traducido y adaptado por J. M. Albaigès)

LENGUAJES ARTIFICIALES

El afán del hombre por inventar medios de comunicación universales ha sido constante a lo largo de la historia. En el siglo XVII Descartes creó un lenguaje con números que representaban palabras e ideas. Sir Francis Bacon sugirió un sistema basado en ideogramas similares a los chinos. Pero estos esquemas y otros muchos que siguieron cayeron pronto en el olvido, pues eran rígidamente lógicos e inhumanos. Desde entonces se han censado unos 700 lenguajes de nuevo cuño, basados casi siempre en las posibilidades ofrecidas por los anteriores. Van desde los vocabularios tomados de algunas lenguas extendidas a la notación numérica o musical.

De todos los lenguajes artificiales aparecidos, el de más éxito ha sido sin duda el esperanto. Fue creado por el doctor judío Ludwig Zamenhof, de Bialystock (Polonia), una ciudad que por el abigarramiento de su población se prestaba al invento: se hablaba en ella corrientemente ruso, polaco, alemán y yiddish. A fines del siglo XIX el entonces adolescente Zamenhof, que dominaba perfectamente estas lenguas además del latín, francés, inglés, griego y hebreo, concibió la idea de idear una vez más una *lingua franca* apta para toda la humanidad.

Lo hizo tomando una serie de raíces de lenguas indoeuropeas y un sistema muy esquemático de 16 reglas invariables. En 1887 publicó el folleto *Lingva internacia*, que firmó firmado con "*Dr. Esperanto*", palabra que en su idioma significaba "el que espera". El éxito de la iniciativa se debía a que el idioma era fácil de entender, como demuestra este párrafo: *La inteligenta persono lernas la interlingvon Esperanto rapide kaj facile. Esperanto esta, la modena kvltura lingvo por la internacia mondo. Simpla, fleksebla, praktiva solvo de la problemo de universala interkompreno, Esperanto meritas vian serioza konsideron. Lernu la interlingvon Esperanto*. Pueden apreciarse enseguida en él algunas de las reglas esperantistas: un único artículo, *la*, los sustantivos terminados en -*o*, los adjetivos en -*a*, los adverbios en -*e*. Los verbos conjugados en -*as* en presente, en -*es* en pasado, en -*us* en futuro, etc.

El esperanto se difundió como la pólvora, y a principios del siglo XX contaba con clubes por todo el mundo, aunque también surgieron diversas secesiones. Su momento culminante llegó en 1909, cuando en el Congreso Internacional de Barcelona se iba a pedir a todos los estados que lo incluyeran en sus programas de enseñanza en la enseñanza primaria. La Semana Trágica frustró esos propósitos, que no cejaron empero posteriormente.

Sin embargo, el momento cumbre había pasado, y en nuestros días se ha constituido en lingua franca mundial, cada vez con mayor fuerza, el inglés, tendencia que sin duda va a continuar.

Pasemos revista rápidamente a algunas de las lenguas internaciones de mayor difusión:

VOLAPÜK

Inventado por Johann Martin Schleyer, prelado católico, en 1880.

De raíces inglesas y latinas y estructura gramatical germánica. El nombre significa "habla internacional". Muy difícil para no lingüistas.

Primera parte del Padrenuestro en volapük: *O Fat abas, kel binol in süls, paisaludomöz nem olal.*

NEUTRAL

Es un volapük simplificado.

Primera parte del Padrenuestro en Neutral: *Nostr patr kel es in sieli, ke votr nom es sanktifiked.*

ESPERANTO

Inventado por Ludwig Zamenhof en 1887.

Sin duda es el idioma inventado que ha tenido más éxito. El vocabulario está derivado de raíces indoeuropeas. Posee una gramática muy simple, reducida a 16 reglas. Primera parte del Padrenuestreo en esperanto: *Patro nia, kiu estas en la cielo, sankta estu via nomo.*

IDO

Derivado del esperanto, ideado por Louis de Beaufront a principios del siglo XX, y aceptado por la Delegación encargada de la adopción de una lengua internacional en 1907, creándose así un cisma con el esperanto original. La palabra “Ido” era un seudónimo de Beaufront.

Padrenuestro en ido: *Patra nia, qua esas en la cielo, tua nomo santigesez*.

NOV-ESPERANTO

Otro derivado del esperanto, creado en 1925.

ESPERANTO II

Otra forma más derivada del esperanto. Creado en 1942.

LATINO SINE FLEXIONE

Creado por Giuseppe Peano en 1903.

Se trata de una derivación del latín clásico. Como indica su nombre, suprime las complicaciones derivadas de la flexión. Padrenuestro: *Patre nostro qui es in celos, que tuo nomine fit sanctificato*.

INTERGLOSSA

Inventado por Hogben, editor de *The Loom of Language*.

Formado por raíces griegas y latinas administradas por la sintaxis china. “Fui allí para hacerlo” es *mi pre kine topo tendo un acte re* y se traduce literalmente como “Yo pasado ir lugar propósito uno hacer cosa”.

INTERLINGUA

Creado en 1924-51 por la *International Auxiliary Language Association*, una organización estadounidense.

Basado en formas del vocabulario inglés, italiano, francés, español, y portugués. Todavía es usado en círculos médicos. Fácil de entender: *Le Secondo Congresso Mundial de Cardiologica, que habeva loco in Washington, D. C., in septembre, 1954, adoptava interlingua como lingua secondari del summarios in su programma official.*

MONLING

Inventado en los años 60-70.

Usa sólo palabras monosílabas. Así la frase “El lenguaje más fácil de entender y usar es obviamente el mejor” es: *ling‘t top pai ken ad ploi, il klar top bon*.

CÓDIGO GIBSON

Inventado por Gibson, un oficial estadounidense de artillería de costa.

Usa sólo símbolos numéricos. “El niño como la manzana roja” es *5-111-409-10-5-516-2013*.

TIMERIO

creado por matemáticos americanos en los primeros años del siglo XX.

Es también un lenguaje basado en números, representando cada uno de ellos una palabra o letra. Nunca cuajó, pues nadie le gusta expresar “Te amo” como *1-80-17*.

LINCOS

Desarrollado por Hans Freudenthal en 1964.

Interesante posibilidad por sus aplicaciones informáticas. Está compuesto de varios símbolos científicos y fácilmente adaptable al código binario, lo que lo hace fácilmente transmisible a cualquier parte del universo.

SOLRESOL

Inventado por Jean-François Sudre (Francia) en 1827.

Fue celebrado por Víctor Hugo y otros autores hasta 1900. Estaba basado en notas de la escala musical, y podía ser silbado, cantado o tocado con un instrumento. Escrito mediante símbolos musicales, podía formar unas 1200 palabras. Pero su gramática era difícil, y su vocabulario requería una memoria prodigiosa.

SPRACHE 2000

Fue invenado por el ingeniero Lothar Hoffmann y buscaba ante todo una simbiosis con la informática, aprovechando las bases hexadecimales. Las palabras son alternativamente de vocal y consonante. Todas las palabras (salvo algunas excepciones) constan de 8 letras, 4 consonantes y 4 vocales alternadas, con lo que presentan un vago aire japonés: FILAHOMO, MIJAMOTO.

Josep M. Albaigès i Olivart
Salou, julio 2000

RECORDANDO A HILBERT

El pasado mes de agosto (el día 8) se cumplió el centenario exacto de las 23 famosas cuestiones de Hilbert. Transcurrido un siglo, se han resuelto una mínima parte de ellas (algunas, por cierto, de una forma que no pudo figurarse nuestro matemático: son indecidibles).
Me informa Miguel Á. Lerma de que el Instituto Clay de Matemáticas en Cambridge, Massachusetts (EEUU) ha lanzado un reto similar para el próximo siglo XXI, aunque la lista es algo más corta, sólo consta de 7 problemas. Los detallo según el artículo de *La Vanguardia* (25.05.00):

1. **P versus NP**. Afecta a la implementación de determinados problemas en programas de ordenador y a la capacidad que tienen éstos de efectuar determinados cálculos.
2. **La conjetura de Hodge**. Plantea si una serie de resultados topológicos que se han podido demostrar en dos dimensiones seguirán siendo válidos en tres dimensiones.
3. **La conjetura de Poincaré**. Sugiere que ciertos objetos matemáticos pueden ser interpetados mejor si se convierten en geométricos y se dibujan.
4. **La hipótesis de Riemann**. Es el más antiguo de los enigmas. Consiste en hallar un método rápido para descomponer un número en sus factores primos constituyentes. Recordemos que muchas claves y códigos de encriptación utilizados en bancos y en el Ejército descansan en la imposibilidad, hasta hoy, de efectuar esta descomposición (estamos hablando de números de centenares de cifras decimales).
5. **Las ecuaciones de Yang Mills**. Explican, en el plano subatómico, el equivalente de las leyes de Newton en el macroscópico.
6. **Las ecuaciones de Navier-Stokes**. Datan del siglo XIX y gobiernan la mecánica de los fluidos. Su resolución permitiría, por ejemplo, fabricar las aeronaves de manera que originaran menos turbulencias.
7. **La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer**. Debe aportar respuestas a unas ecuaciones llamadas curvas elípticas de primer género, que guardan mucha relación con uno de los sistemas utilizados para la encriptación. El problema, pues, se relaciona con el número 3.

El aliciente es que quien consiga resolver alguno de ellos recibirá un premio de 1 millón de dólares por problema resuelto. Pueden verse los detalles en:

http://www.claymath.org/prize_problems/index.htm

JMAiO, ago 2000

LA FÓRMULA DE GREEN BANK

En 1961 un grupo de científicos al mando de Frank Drake, en el observatorio astronómico estadounidense de Green Bank (Virginia Occidental), y en el seno del Proyecto Ozma, destinado a investigar las posibilidades de existencia de ETI (*extraterrestrial intelligence*), crearon una fórmula para estimar el número de posibles civilizaciones similares a la nuestra en el espacio. Era:

$$N = R^{*} f_p n_e f_l f_i f_c L$$

Siendo:

N: Número de civilizaciones en la galaxia capaces de comunicación interestelar.
R*: Tasa media a la cual las estrellas se desarrollan durante la vida de la galaxia.
f_p: Fracción de estrellas con planetas.
n_e: Número medio de planetas por estrella capaces de albergar vida.
f_l: Fracción de planetas con vida.
f_i: Fracción de planetas con vida inteligente.
f_c: Fracción de planetas con vida inteligente capaces de comunicación estelar.
L: Tiempo medio de una sociedad capaz de comunicación interestelar.

El único de estos valores que es conocido con alguna aproximación es R*. Todos los demás son estimaciones muy groseras, incapaces de garantizar siquiera un orden de magnitud. Por ejemplo, ¿cuánto vale L? Para nuestra sociedad, aproximadamente 70 años hasta ahora (la comunicación por radio empezó en los años 30), pero, ¿cuánto tiempo podremos durar en nuestro estado actual sin retroceder a otro inferior? Para unos, 100 años, para otros, 10000. Esta última es la cifra que, conservadoramente, estimaron los científicos.

No vale la pena describir el resto de valores que al buen tuntún dieron a los otros parámetros. El cálculo les condujo a N = 1000 (como hubiera podido ser N = 1 ó N = 1.000.000). El caso es que, con todo, la fórmula ganó alguna popularidad en los años 80 gracias a su divulgación por Carl Sagan.

JMAiO, jul 00

LIPOGRAMAS FORZADORES
DE LAS FRECUENCIAS NATURALES

De acuerdo con las tablas estadísticas que establecen como letras más frecuentes del castellano las recogidas enlas palabras EAOSNR LIDUCT, estas doce representan, por sí solas, el 84 % del uso total del alfabeto. Puede recordarse el primer grupo con cualquiera d elas palabras ASNERO, ORANÉS, ROANÉS y SERANO, y el segundo con DÚCTIL.

De ahí que algunos experimentadores literarios como los del grupo LIPO (Literatura Potencial) hayan ensayado la composición de textos lipogramáticos mediante sólo esas doce letras. Veamos, por ejemplo, un fragmento de un poema compuesto por Ramón Tiraplom, en cada uno de cuyos versos se da el grupo completo:

SO CRUENTA LID

Luciendo tras
dulce trino ... ¡As,
sin lucro te da!
Tú ríndelos. ¡Ca!
....

La investigación informática ha proporcionado las tres únicas palabras del DRAE donde figura todo el grupo: ADULTERACIONES, DESACUARTELAMIENTO Y GRANDILO-CUENTES. Con once letras hay unas 70, una de ellas (TRANSLÚCIDO) con sólo once letras y otras tres con doce: ADULTERACIÓN, CULTERANISMO, GESTICULADOR, aparte de algunos plurales.

Volviendo a los lipistas, algunos más radicales proponen la supresión del resto del alfabeto considerando el grupo básico EAOSNR LIDUCT como suficiente para expresar cualquier situación. Véase, si no, esta reconversión de un conocido poema:

CANCIONES INTERIORES

VERSIÓN ORIGINAL	VERSIÓN REDUCIDA
En la tiniebla oscura, con ansias en ternura enardecida, ¡o suerte celestial!, salí sin ser notada, estándose la casa serenada. San Juan de la Cruz	*A oscuras, si bien lúcida,* *por la secreta escala, ocultada* *¡o suerte celestial!,* *a oscuras. en celada,* *estándose la casa serenada.* **San Uan de la Cru**

En fin, se ha llegado incluso a probar con las cinco primeras letras sólo. Los poquísimos textos obtenidos ("— ¿Nos sanas, San Senén?" "— No sano asnos") no ganarán el Nobel.

Osé Aria Alaiés Oliart

EL OBTUSÁNGULO ATACA DE NUEVO

En [C.55] apareció un artículo titulado "**Un problema para obtusos**" que trataba del siguiente problema: Supongamos un triángulo obtenido al azar, ¿qué probabilidad tiene de ser obtusángulo?
Esta probabilidad resultaba ser del 75%. Las dos pruebas aportadas eran un tanto enrevesadas. Pasado el tiempo encontré otra demostración que, de ser correcta, parece más sencilla: Para que un triángulo sea obtusángulo basta con que uno de sus tres ángulos **A**, **B**, o **C**, sea obtuso. La probabilidad $\mathbf{P_1}$ de que el ángulo **A** sea obtuso es 90º/180º = **1/2**. Ahora bien, si **A** no es obtuso podrían serlo el **B** o el **C** (probabilidades mutuamente excluyentes, ya que si uno es obtuso el otro no lo será). La probabilidad de que **B** sea obtuso, condicionada a que **A** sea agudo es: $\mathbf{P_2}$ = 1/2 x 1/2 = **1/4.**
La probabilidad buscada será pues: $\mathbf{P} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} = \mathbf{3/4}$.

En este problema no interviene para nada el tamaño que pueda tener el triángulo, éste quedará perfectamente definido tan pronto como demos valor a dos de sus ángulos, por ejemplo el **A** y el **B**, ya que el **C** sería igual a **180º - (A+B).** Así pues, conseguir un triángulo al azar consistirá en obtener al azar dos de sus ángulos cuya suma ha de ser inferior a 180º.

Podemos simular, con la ayuda de un ordenador, la generación al azar de los dos ángulos **A** y **B**; el mismo programa investigará si el triángulo resultante es o no obtuságulo. Generaremos así tantos triángulos al azar como nos venga en gana y hallaremos la relación entre casos favorables (en que el triángulo resulta ser obtuságulo) y casos totales. Con el programa en BASIC que expongo a continuación el ordenador ha examinado **10.000.000** de casos y ha obtenido como valor de la probabilidad buscada **75,00846%** es decir prácticamente 75%, valor que coincide con la probabilidad que habíamos calculado teóricamente.
Convencido plenamente de que el obtusángulo es tres veces más probable que el acutángulo mi espíritu ha quedado tranquilo y sosegado.

```
10 CLS : RANDOMIZE (TIMER)
20 INPUT "Número de pruebas :" , NP
30 FOR N = 1 TO NP
40 X = 180*RND(1) + 1 : Y = 180*RND(1) + 1
50 IF Y < X THEN
        A = X - Y
        B = Y
        C = 180 - X
        IF A > 90 OR B > 90 OR C > 90 THEN CNT = CNT + 1
        END IF
60 IF Y > X THEN
        A = X
        B = Y - X
        C = 180 - Y
        IF A > 90 OR B > 90 OR C > 90 THEN CNT = CNT + 1
        END IF
70 P = CNT/N
80 LOCATE 3,1 : PRINT "Prueba nº        : " ; N
90 LOCATE 5,1 : PRINT "Probabilidad        : " ; P
100 NEXT
```

Aristogeronte
Madrid, junio de 2000.

REPARTO EQUITATIVO

En uno de los varios libros de **Perelman** editados por MIR aparece el siguiente problema que resulta curioso pues da la impresión de que faltan datos para dar con la solución, sin embargo no es así.

Espero que algún carrollista la encuentre.

Dos socios mercaderes son dueños, a partes iguales, de una partida de vacas que deciden vender recibiendo por cada cabeza de ganado igual cantidad equivalente a tantos euros como vacas hay en la partida.
Con todo el dinero obtenido compran un rebaño de ovejas adultas y un corderillo, pagando por cada oveja 10 euros y por el corderillo una cantidad lógicamente menor.
Al repartirse el rebaño en dos mitades exactas de cabezas, el corderillo le toca a uno de los mercaderes que, lógicamente, fue compensado por su socio con una cantidad entera de euros.
¿A cuanto ascendió la compensación?

Aristogeronte.

COMENTARIOS DE JMAiO A "EL OBTUSÁNGULO ATACA DE NUEVO" Y A "REPARTO EQUITATIVO"

Respecto al Obtusángulo, lamento turbar el sosiego del espiritu de Mariano, pero voy a discutir nuevamente su solución:-) Si el ángulo A resulta ser agudo, no es cierto que la probabilidad de que el B también lo sea valga 1/2, ya que esta probabilidad está en función del propio valor de A. Así, para un valor dado, la probabilidad de que B sea mayor de 90 es 90/(180 - A). Esto nos conduce a:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{90} \frac{90}{180 - A}\, dA$$

que fácilmente se halla que vale ln(2). Por tanto, finalmente el valor buscado es (1 + ln(2))/2 = 0,8466.

En cuanto al segundo enunciado se reduce a la ecuación de Pell $10x^2 + 1 = y^2$. Yo la resuelvo de un modo tosco pero rápido: ya que y/x • • 10, encuentro el desarrollo de este valor en reducidas, que es {3,6,6,6,...}. Las sucesivas fracciones aproximadas para • 10 son 3/1, 19/6, 117/37, 721/228,... La segunda de ellas nos proporciona una solución: $10 \cdot 6^2 + 1 = 19^2$. Otra más avanzada sería la correspondiente a la cuarta, $10 \cdot 228^2 + 1 = 721^2$.

JMAiO, verano 2000

DE NUEVO EL TARTAJA

El problema del Tartaja publicado en [C-65] ha merecido la atención desde el otro lado del océano. Reproducido en el *Snark*, sus lectores han aportado nuevas contribuciones al mismo.

Se me ha ocurrido una variante bidimensional del problema: hallar el lugar geométrico de los puntos interiores a un triángulo tal que con los segmentos determinados entre dicho punto y cada uno de los vértices pueda formarse un triángulo rectángulo.

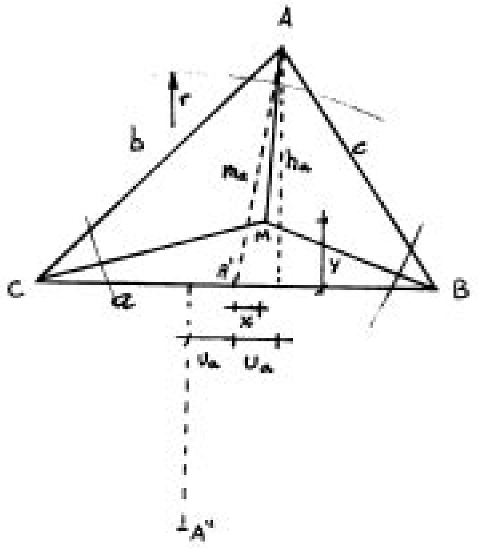
Duro y a él.

JMAiO, jun 00

SOLUCIÓN AL NUEVO TARTAJA

Acometamos el problema de forma analítica.
Llamaremos:

a,b,c: La dos del triángulo
h_a: Altura correspondiente al lado *a*.
m_a: Mediana correspondiente al lado *a*.
u_a: Proyección de m_a sobre *a*.
Situado el triángulo de la forma habitual y tomando como origen de coordenadas A', centro del



lado *a*, tomando v. gr. MA como la hipotenusa del triángulo a construir, es inmediato que deberá cumplirse $MB^2 + MC^2 = MA^2$. Expresando cada segmento según Pitágoras se tendrá:

$$\overline{MB}^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + y^2$$

$$\overline{MC}^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2$$

$$\overline{MA}^2 = (u_a - x)^2 + (h - y)^2$$

Conque, sumando y simplificando, pronto se llega a:

$$x^2 + y^2 + 2u_a x + 2h_a y = u_a^2 + h_a^2 - a^2/2$$

Igualdad que podemos escribir:

$$(x + u_a)^2 + (y + h)^2 = 2(u_a^2 + h_a^2) - a^2/2 = 2m_a^2 - a^2/2$$

¡Sorpresa! El lugar geométrico buscado resulta ser un arco de circunferencia con centro situado en el punto A”, antisimétrico de A respecto a A’, y radio $r = \sqrt{2m_a^2 - a^2/2}$.

Por cierto que este valor es fácilmente calculable. En geometría métrica elemental se demuestra que $m_a = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}/2$, y sustituyendo, se obtiene:

$$r^2 = b^2 + c^2 - a^2 = (b + c + a)(b + c - a)$$

Si, como es costumbre, se hace $p = (a+b+c)/2$, se halla finalmente:

$$r = 2\sqrt{p(p - a)}$$

Como el anterior razonamiento hubiéramos podido hacerlo también tomando OB y OC como hipotenusa, se obtendrán en general tres arcos de circunferencia, que configuran la solución. Algunos de ellos pueden quedar fuera del triángulo, lo que los invalidará.

Como ejercicio, se propone dibujar la curiosa figura que resulta cuando el triángulo es equilátero.

JMAiO, jun 00

TENGUI, FALTI...

Los que hace muchos años estábamos en edad de coleccionar cromos nos las veíamos y deseábamos para completar la colección. Había que comprar sobres y más sobres con la esperanza de que alguno acabara conteniendo el cromo soñado que permitía nuestro sueño.

Naturalmente, la solución más sencilla era intercambiar cromos con los compañeros. Pero en este caso había que pagar por ellos una determinada cotización: dos por uno, cinco por uno e incluso cien por uno si el cromo era “difícil”.

Algunas editoriales ofrecían facilidades: era posible comprar los cromos sueltos a elegir, naturalmente a un precio superior, que triplicaba o cuadruplicaba el original. También algunas accedían al cambio, con cotizaciones de cuatro por uno o similares.

Salta a la vista que la estrategia más sensata para completar la colección sin arruinarse era comprar cromos en sobres hasta tener una determinada parte de la colección completa, y terminarla comprando los que quedaban a los precios superiores impuestos por los compañeros o la editorial.

Y ahora viene la pregunta: ¿Cuál es la estrategia óptima? Supondremos que el precio de un cromo suelto (comprado o intercambiado) es k veces el del original y que la colección consta de N cromos. Se supone que todos tienen la misma probabilidad de aparecer en los sobres.

SOLUCIÓN A TENGUI, FALTI...

El enfoque riguroso del problema exigiría calcular las probabilidades de que, con una existencia de *n* cromos, se tenga la colección completa, que falten uno, dos, etc. El aparato matemático exigido sería tan farragoso que de hecho resulta imposible el enfoque por este procedimiento.

Por ello será inevitable asumir ciertas simplificaciones, y la mejor parece trabajar con esperanzas matemáticas. Llamaremos "novedad" de un cromo a la probabilidad de que éste sea distinto de los que ya tenemos. Y llamaremos *t* el *tengui*, es decir, el número de cromos *distintos* que en un momento dado poseemos.

Supongamos que se compran los cromos en la tienda (o sea al azar). El primero aporta una "novedad" igual a *1*, que simbolizaremos $t_1 = 1$. Pero el segundo aporta una "novedad" menor, ya que existe una probabilidad igual a *1/N* de que sea igual al primero. Suponiendo por ejemplo N = 10, será, $t_2 = 1 + (10 - t_1)/10 = 1 + 9/10 = 1{,}9$.

Es decir, que llamamos t_n a la esperanza matemática del número de cromos distintos al comprar *n* de ellos al azar. Al pasar al tercer cromo, y según el mismo razonamiento, es $t_3 = 1{,}9 + (10 - 1{,}9)/10 = 2{,}71$.

Procediendo en general, *es* $t_n = t_{n-1} + (N - t_{n-1})/N$. O sea:

$$t_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) t_{n-1} = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left[1 + t_{n-2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] = ...$$

Continuando con el desarrollo de esta expresión, pronto se llega a:

$$t_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 + ... + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

Sumando esta serie geométrica y simplificando, se obtiene finalmente:

$$t_n = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

A título de ejemplo, si n = N, resulta aproximadamente:

$$t_n = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \cong N\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63N$$

Dicho de otra forma: comprando un número de cromos igual al de la propia colección, por término medio sólo se tendrán un 63 % de ellos no repetidos.

Desde luego, la colección completa supone que $t_n = N$, lo que es imposible. Podríamos contentarnos con algunas aproximaciones, por ejemplo, suponer que $t_n = N - ½$, y en este caso sería aproximadamente $Ne^{-n/N} = 1/2$, ecuación trascendente de la que resulta $n = N\ln(2N)$, valor desde luego desproporcionado (v. gr., para N = 100, n = 530), por lo que no hay más remedio que recurrir a los compañeros o a la editorial, en ambos casos mediante adquisición o intercambio. Vamos a estudiar cada caso por separado.

1. Adquisición de cromos.

La compleción "económica" de la colección es un problema de máximos y mínimos. Comprando *n* cromos a la tienda, el número de ellos que son *falti* es igual a:

$$f_n = N - t_n = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \qquad (1)$$

Si los cromos adquiridos han sido pagados a una unidad por cromo y los *falti* deben serlo a k unidades, el coste total de la colección es:

$$C(n) = n + kf_n = n + kN\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

La simple derivación de esta expresión respecto a n nos dará el valor óptimo de este valor, que satisfará la ecuación:

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) = -\frac{1}{kN}$$

Con suficiente aproximación, dado que N es siempre grande, puede concluirse:

$$n = N \ln k$$

Por ejemplo: para una colección de $N = 100$ cromos, con un valor de compra por cromo suelto *falti* fijado en $k = 4$, se encuentra que n = 239 veces el valor de un único cromo.

Lo que nos lleva a establecer una relación interesante: la existente entre esta inversión "óptima" y el coste total de los cromos de la colección comprados a su precio uno por uno:

$$r = \frac{C}{N} = 1 + \ln k$$

2. Intercambio de cromos.

Salta a la vista que este procedimiento es en general más favorable, pues permite aprovechar los cromos repetidos. De hecho, la condición fundamental será *que los cromos repes sean suficientes para comprar los falti a la cotización k*. Es decir, en términos matemáticos:

$$kf = n - t$$

De donde, sutituyendo los valores anteriores de la fórmula (1) y simplificando, se obtiene:

$$n - (k-1)Ne^{-n/N} = N$$

Esta ecuación trascendente es bastante más complicada que la anterior, pero puede igualmente resolverse por métodos aproximados. Para el mismo ejemplo, con una tasa de intercambio igualmente igual a 4, resulta una inversión total de 160 cromos.

3. Comparación

El segundo procedimiento será casi siempre de eficacia muy superior al primero, pero pueden darse excepciones. En algún caso muy extremo, de soluciones muy cortas, puede resultar más económico comprar cromos a la editorial que intercambiarlos por cromos sueltos: por ejemplo, para $N = 6$ y $k = 2$. La inversión es, con compra, de 10 cromos, y con intercambio, de 8.

Josep M. Albaigès, Barcelona, marzo 2000