CARROLLIA No 67. Diciembre 2000

CARROLLIA

Dirección en la web: **http://ciudadfutura.com/juegosmensa/carrollia.html**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès **Francesc Castanyer**
e-mail: jalbaiges@caminos.recol.es

SUMARIO

67	2
Cartas bimilenarias	3
Cuadrados mágicos impares a mogollón	8
Cubos e hipercubos mágicos	9
Dos problemas de José Antonio Echagüe	11
El acento en las terminaciones en -on/-ón	13
El año de las matemáticas en los billetes de metro	13
El obtusángulo ataca de nuevo	14
El problema de Alex y David	15
Escritura vecinal	15
La función libidínea	16
Los peligros de la inducción intuitiva	17
¿Pasar un cubo a través de otro igual?	18
Retos matemáticos del instituto Clay para el siglo XXI	19
SOLRESOL	21
Tonelería comparada	25
Yo, tú, él	29
Articulación de las vocales	30

El 67 es un número primo apartado, hosco e insociable, del que poco puede decirse. Es titular de una curiosa relación aritmética:

$67^2 = 4489$
$667^2 = 444889$

67

Es el cabalístico de Binah, madre suprema de la tercera Sephirah.

Es el año de la introducción del budismo en China y del martirio de san Pedro y san Pablo en Roma.

En loterías, recibe en Cartagena el nombre de “el fraile”, usualmente reservado al 13 en otros lugares.

También es el tercer primo irregular (los anteriores son 37 y 59). Los primos irregulares son aquéllos tales que el número de clases de divisores de $Q(\xi_p)$ es divisible por p (ξ_p es una raíz primitiva de la unidad de grado p). Estos números deben dividir el numerador de uno de los p - 3 primeros números de Bernouilli. En efecto, 67 divide el numerador de B_{58}.

El anillo de los enteros del cuerpo cuadrático complejo Q(• -67) es factorial, pero no euclídeo. Sólo existen nueve valores de *d* tales que el número de clases de divisores de Q(• -*d*) sea igual a 1, esto es, en los cuales todo entero se descomponga de manera única en un producto de factores primos. Son *d* = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67 y 163. Estos valores habían sido ya determinados por Gauss, pero hasta 1966 no se demostró que no había más. Sólo para los cuatro últimos Q(• -*d*) no es euclídeo.

El número de Mersenne 2^{67}-1 es pseudoprimo: vale 761 838 257 287 x 193 707 221. Este producto fue hallado en 1903 por Cole, quien más tarde manifestaría a E. T. Bell que la descomposición le había llevado “tres años de domingos”.

CARTAS BIMILENARIAS

En el pasado verano, el día 8 de agosto fue histórico en las matemáticas: en tal día, en 1900, propuso Hilbert sus famosas 23 cuestiones. Éstas fueron renovadas, para el siglo XXI, por el Instituto Clay, como ya dimos cuenta en [C-66]. No obstante, la presentación que allí se dio de ellas, tomada de un periódico, era excesivamente superficial, como observó Miguel A. Lerma. Por gentileza de nuestro buen amigo, publicamos más adelante el enunciado exacto de los “retos Clay”.

Dice José Antonio de Echagüe, de Madrid:

Sigo con el mayor interés las estupendas cosas que aparecen en ©. Saludos y felicitaciones a todos los ©.rrollistas.

Te adjunto un par de notas. Una se refiere al dilema electivo de eliminar al “peor”, cuando todos son buenos. La otra nota describe una variante del “Dilema de la traición”, que he leído en un magnífico relato de G. Bufalino, que os recomiendo.

El pasado agosto tuve la ocasión de asistir en el puente internacional de Irún al homenaje a Luis Companys, en el 60 aniversario de su entrega por los alemanes a la policía española. Realmente fue muy emotivo para todos los presentes, entre los que naturalmente acudieron muchos catalanes.

Muchas gracias por tu carta, por tus amables palabras, y, sobre todo, por tus contribuciones a Carrollia, la revista de todos. La inesperada salución que ofreció José Antonio para el problema *Seleccionar el/la mejor* (deben saltarse ese párrafo quienes deseen investigarla por su cuenta) es que al final resultó eliminada Nuria, con el fin de evitar disimetrías en el equipo final. En cuanto al otro problema, *El dilema de la traición*, parece una variante del famoso *Dilema de prisionero*, pero con nuevos componentes psicológicos. Posiblemente, la solución mas lógica es que el jefe escriba su propio nombre (nada pierde con ello, ya que va a morir de todas formas), y los demás, si razonan lo que él razonará, se abstendrán de escribir nada en su papeleta. Con ello pasarán un fuerte canguelis, pero si todo sale bien, se salvarán y salvarán también su honor (observemos que si uno se decide a escribir el nombre de su jefe, corre el riesgo de que todos lo hagan, y la quíntuple acusación sería una marca de infamia para todos). De todos modos, ambas posibilidades son muy opinables. Se agradecerán nuevos puntos de vista.

En cuanto al acto en el puente internacional, hubiera sido también particularmente emotivo para mí, pues a Companys lo fusilaron cuando yo tenía una semana de edad. De hacer caso de las doctrinas transmigracionistas, podría creer que se reencarnó en mí.

Alfredo Quesada nos manda un estupendo ejemplo de “cuadrar la esfera”, es decir, hallar cuadrados mágicos o crucigramas dobles, partiendo de la palabra inicial ESFERA:

E	S	F	E	R	A
S	A	E	T	A	R
F	E	R	O	C	E
E	T	O	L	I	O
R	A	C	I	A	L
A	R	E	O	L	A

Antonio Casao, de Zaragoza, es, además de uno de los socios fundadores de [C], un eficaz suministrador de recortes de noticias interesantes. En una larga y amena carta, comenta:

Mientras rebuscaba entre mis recortes de Prensa, me he encontrado con uno donde se recogen unos datos biográficos de Alan Greenspan, el temido presidente de la Reserva Federal estadounidense. Pues bien, en él se afirma que el Sr.Greenspan "disfruta resolviendo problemas estadísticos y enigmas matemáticos", o sea, que es un “carrollista" sin saberlo.

También me he encontrado con un artículo "*A favor de la pereza*", que podría ir muy bien para el BOFCI. Encajaría allí muy bien asimismo uno de Fernando Fernán Gómez, en el que se lamentaba del afán de todos los políticos por crear puestas de trabajo. En su opinión, lo que hacen falta son puestos de ocio. Pero lo más recomendable en este sentido es "*El derecho a la pereza*", de Paul Lafargue, yerno que fue de Carlos Marx, cuyas doctrinas predicó en España con bien escaso éxito.

De un tratado de Mariología que tengo en casa extraigo esta curiosa frase:

"Alaben, Bendigan, Celebren, Chillen, Decanten, Ensalcen, Feliciten, Glorifiquen, Halaguen, Imiten, Juren, Krotofoneen, Laureen, Llamen, Modulen, Nombren, Obsequien, Panegiricen, Quieran, Realcen, Saluden, Titulen, Utilicen, Veneren, Xilografien, Yuxtapongan, Zafen a María en su Concepción Inmaculada".

Se dice allí que es así como termina el prólogo de “Diccionario predicable de la lengua mariana” de Antonio Berjón y Vázquez Real, editado en Tarazona (Zaragoza), en 1911.

Supongo que te encantará a nuestro amigo Jorge Viaña Santa Cruz. Que no se moleste nadie en buscar en el diccionario la palabra "krotofonear", porque no la encontrará. Bedón la justifica con el invento de un peculiar medio de comunicación con los seres celestiales, que denomina "krotófono", en el que *"se reproducen los sonidos de las preces y peticiones de los fieles, para que lleguen al trono de Dios*". Tampoco parece ser que esté registrado el correspondiente invento.

También me he encontrado con un artículo, "Palabras", en el que se recuerda aquella iniciativa para elegir las palabras más hermosas de nuestra lengua común y de la que "Carrollia" también se hizo eco. Te lo adjunto por si quieres reproducirlo y animar a los "carrollistas" a que contribuyan con su elección. Los compañeros cuya lengua materna sea el catalán, gallego, inglés, etc. podrían elegirlas también entre las de esas lenguas e ilustrarnos a los demás.

Te incluyo otro artículo “Palabras con gancho (Antofagasta)” del académico de la RAE Emilio Lorenzo, que es muy rica en sugerencias. Se citan en él nombres geográficos especialmente eufónicos, como Guantánamo, palabras recientemente creadas por el pueblo llano, como encueratriz, miniesforzante, etc., catalanismos, galleguismos, vasquismos, andalucismos, etc.

Te adjunto asimismo un artículo sobre moda en nombres, otros sobre Lewis Carroll, uno más sobre aportaciones hispánicas al inglés, otro sobre diccionarios de español.

Por cierto, en este último se indica que *"las autoridades chinas han decretado cómo deben escribirse en alfabeto latino los nombres de sus ciudades: no Pequín ni Pekín, sino Beijing, no Cantón sino Guangzhou ...*". El que se trate de una imposición a los hablantes de otros idiomas por parte de un país que, además es tan poco respetuoso de los derechos humanos, es lo que da tan escasa validez al caso de Beijing como posible ejemplo. Así ha debido de entenderlo "El País" que ha vuelto a escribir Pekín, abandonando Beijing. En el de Emilio Lorenzo se alude también a la pretensión china, que se contrapone a la actitud de Grecia, Filipinas, Alemania, Holanda, etc, "*que no pretenden imponer grafía ni pronunciación a los extraños".*

El artículo "Matemáticas divertidas", de nuestro colega economista Luis Ignacio Parada, termina con el enunciado de un problema que parece ser que circula por Intemet.

En el de Fernando Arrabal, en "ABC", se lee “*La Patafísica, no lo olvidemos, es la Sociedad de Investigaciones Inútiles y Sabias*”. Como ves, un ilustre antecedente de nuestra Facultad de Ciencias Inútiles.

Muchas gracias, Antonio. Sobre la composición alfabética, se me ha ocurrido complementarla con la siguiente. Espero que la hubiera suscrito Antonio Berjón.

Zurren, Yugulen, Xenofobien, Watercloseteen, Vituperen, Ultrajen, Torturen, Sobajen, Reprueben, Quebranten, Persigan, Odien, Ñublen, Nieguen, Maldigan, Lidien, Kremlineen, Jeringuen, Insulten, Hieran, Guerreen, Finiquiten, Execren, Detesten, Combatan, Blasfemen, Abominen, al detestable Satanás.

(Aparte de ceñirme a la versión actual del abecedario español, me he permitido alguna pequeña licencia, como *kremlinear*, que supongo sería un verbo adecuado para aplicarlo al Maligno (al menos hasta la caída de la URSS), y *waterclosetear*, que sería un cultismo equivalente a “mandar a la...”.)

En cuanto al comentario sobre *Pekín/Beijing*, yo no estoy muy seguro de que se trate de una “imposición” de los chinos, sino un intento de recuperar sus símbolos nacionales. En muchos países los topónimos fueron fijados por potencias extranjeras, a menudo conquistadoras, que aproximaron más o menos groseramente su sistema fonético al autóctono (mucho habría que decir de nombres como *Quaugnáhuac*, ‘lindero del bosque’ en nahuatl, hoy Cuernavaca, o *Virú*, ‘agua, río’ en guaraní, hoy Perú, etc.). Por ello me parece lógico que los naturales deseen recuperar los sonidos originales. Si éstos son Beijing, Mumbai, etc., así habrá que escribirlo, ¡qué remedio!. En fin, que creo que el tema es muy complejo y hay mucho que decir sobre él.

(Añado que la polémica epistolar prosiguió, pero no quiero dar la lata a los lectores de [C]). En cuanto a la patafísica, veréis que precisamete en el corriente número del BOFCI se trata largo y tendido sobre ella.

Y, ¡cambio de continente! Ricardo Isaguirre, de La Plata (Argentina), a propósito del artículo *Tengui, falti*, precisa algunas minucias lingüísticas:

Me llamó la atención el apartado (*Tengui, falti*) sobre lo que llamáis al parecer en la Península "cromos"; nosotros decimos "figuritas", donde la idea de diminutivo ha como desaparecido. Siempre sentí interés por ese aspecto de la fluctuación *ligera* de la lengua, que forma parte de la vida cotidiana, como cuando recordamos que en la Argentina llamamos "canillas" a lo que el resto de los hispanoparlantes llaman "grifos". Los que vivimos en América tenemos además las múltiples variantes de país a país, y los argentinos agregamos los aportes del lunfardo.

Los cromos los llamábamos de niño en Cataluña *sants*, obviamente porque mucho tiempo atrás los únicos que había eran de imágenes de santos (los cuales, por cierto, solían ser en blanco y negro). La acepción en español figura también en la entrada **santo** del DRAE, aunque es poco utilizada.

Obviamente la referencia religiosa había desaparecido del genérico *sants*, que podían ser de guerra, del Oeste o sobre cualquier tema (hoy, en distorsión máxima, probablemente los habría incluso pornográficos). Igual que ha desaparecido la referencia diminutiva de 'canilla' (en cat., 'canella'), de 'pañuelo' y tantas otras (v. gr., en cat. la falda como prenda femenina es *faldilla*, y *falda* queda reservado al halda o a la falda de los montes).

Mariano Nieto, de Madrid, manda una de sus habituales crónicas de viajes:

Durante mi estancia en Luso leí un interesante libro que me ha encantado, se titula ***El enigma de Fermat*** escrito por el físico inglés de origen punjabí **Simon Singh.** Trata del famoso último teorema de **Fermat** y de su reciente resolución por **Andrew Wiles**. La exposición del tema es amenísima y hasta tiene su dosis de suspense. He visto publicado en español otro libro de Singh, ***Los códigos secretos***, que ya está en lista de espera.

En el último número de **[C]**, que estoy leyendo a ratos perdidos, veo cómo te acosa el número **6**. ¿Has caído en que tu nuevo distrito postal de Barcelona es el **6 x 6 = 36**?

En Portugal siempre me han llamado la atención nombres de persona que, pese a nuestra vecindad, no son corrientes en España, por ejemplo: **Adruzilo, Alcindo, Maurílio, Elmano, Elysio,**

Acurcio, Armindo, Eselindo, Belmiro, Cremilde, Ermelinda, Leonilda, etc. Por otro lado encuentro que compartimos con los portugueses algunos apellidos sin significado para nosotros pero que sí lo tiene para ellos, así **Machado,** que en portugués es hacha; **Rato** (ratón); **Petisco** (aperitivo); **Besteiro** (ballestero); **Alfayate** (sastre), **Coello** (conejo), **Ermida** (ermita), **Salgado** (salado), etc.

Quince días en Portugal dan para un montón de excursiones. Una a **Fátima**, en domingo, con un gentío inmenso, muy "genuino", asistiendo a la procesión de la Virgen entre cánticos, velas y ondear de pañuelos blancos como palomas. Más de media hora para salir de la autopista por el peaje. Lo de Fátima es un fenómeno que me plantea desde antiguo un montón de interrogantes tras leer varios libros sobre el tema (uno de un cura "*defroqué*" portugués, enemigo acérrimo de las apariciones). La excursión por la **Sierra de Caramulo** fue interesante, llegamos a sitios poco o nada frecuentados por el turismo como el pueblito de **Jueus**, que ni siquiera aparecía en mi mapa, en lo más alto del macizo. Al parecer los judíos se refugiaron en esta zona cuando su expulsión. Al pie de Jueus aún resisten, incólumes al paso de los siglos, algunos tramos de la calzada romana que cruzaba de este a oeste toda la montaña para facilitar el transporte de la sal de **Aveiro** hacia el interior de Hispania. Por esta sierra abundan los monumentos megalíticos situados en zonas poco accesibles, vimos el bonito dolmen ("anta" le llaman en portugués) de **Arca** situado en una gándara. En **Vouzela**, entre los ríos **Vouga** y **Zela**, parece que hubo muchos partidarios (filipinos) de Felipe **II** y **III** de España (**I** y **II** de Portugal) y aún hoy apodan a los de este pueblo "españoles". Tiene gracia.

Es lógico que los portugueses vean los acontecimientos desde su óptica particular, he aquí dos casos: Portugal solo consiguió en las olimpiadas de **Sidney** dos medallas, las dos de bronce, pero hete aquí que una mozambiqueña ganó el oro en la carrera de 800 m y la prensa decía exaltada: "¡P*rimera medalla de oro de un país de lengua portuguesa!*...". El que no se consuela es porque no quiere. También me pareció divertida la forma de recoger la noticia de la despresurización del avión en que viajaba el equipo del **Real Madrid** a Alemania. Decía el titular del **Diario de Noticias**: "*Susto no aviao de Luis Figo*". Como se ve el avión no se caracterizaba por el transporte de un equipo completo de futbolistas sino porque en él viajaba a la estrella portuguesa.

[Sobre el problema de Monty Hall] Fíjate que si en vez de tres cajas hubiera n y el presentador retirase n-2 vacías, el cambio acarrea un notable incremento de las probabilidades desde 1/n a (n-1)/n.

Mariano mandaba, además, su artículo “El Obtusángulo ataca de nuevo”, que hallaréis en este número. Gracias por esa carta, que por un pelo no pudo entrar en [C-65], ya compuesta por Castanyer. El día de su recepción celebrábamos una comida ‘semagamera’ los miembros de la palindromía.

Precisamente yo también leí este verano *El enigma de Fermat*, concuerdo en que es un libro muy ameno y escrito con gran competencia.

Muchas gracias por tu observación del 36. Y otra más: el otro día cumplí 60 años.

Esos nombres portugueses, que vemos continuados en Brasil son siempre de una gran belleza y exóticos para nosotros. El español se perdió muchos años en la monotonía onomástica, pero hoy se está recuperando, quizá más de lo que debiera, pues para plagar nuestra nomenclatura con los Kevin, Cary y otras pleitesías al americano, no hacían falta alforjas. Y siguiendo con Portugal, supongo que Fátima debe de ser similar a Lourdes, donde estuve hace un par de años: es lo más parecido que he visto a Andorra o Canarias, pero con rosarios y medallas en vez de transistores.

Los portugueses no tienen la esclusiva en sus “consuelos”; he visto otros análogos practicados por nosotros. En un libro español leí que el "Teorema de Rodrigues" era el único con el nombre de alguien ibérico. Buenos Aires fue hace tiempo "la mayor ciudad de Iberoamérica"; luego, con el crecimiento desaforado de São Paulo hubo que restringir a "Hispanoamérica", y ahora, tras México, hay que decir "la América del Sur de habla española". El lenguaje se presta a lo que haga falta, si es convenientemente torturado.

Y pongo a continuación algunos fragmentos de la amistosa polémica epistolar que hemos sostenido Mariano y yo a propósito del obtusángulo. Procuraré no arrimar el ascua a mi sardina, sino exponer los principales argumentos de cada uno. Dije a propósito de la demostración de Mariano:

Pues, querido Mariano, te diré que sigo en mis trece... y verás por qué. Creo que no es extraño que por distintos caminos llegues al valor ¾, puesto que éste ya estaba implícito en todos los razonamientos que a él conducían (como hubiera dicho Kant, “la conclusión estaba ya en las premisas”). *Pues en todos ellos tú consideras como “triángulo aleatorio” el que resulta de unir tres puntos del plano elegidos al azar.* Si aceptamos ese antecedente, estoy de acuerdo con los consecuentes.

Razonamientos de Mariano:

Bueno, le llega el turno al dichoso obtusángulo. Afirmas que *sigues en tus trece* como el papa Benedicto, sin embargo no pierdo la esperanza de que renuncies a la tiara. Piensas que p = 0,75 es el resultado de la forma de originar el triángulo aleatorio, pero no por ello errónea. He atacado el problema de diversos modos y no es exactamente cierto lo que afirmas de que en todos ellos considero como triángulo aleatorio el que resulta de unir tres puntos del plano elegidos al azar. Por ejemplo, en mi artículo ***El obtusángulo ataca de nuevo***, las dos pruebas que aporto se basan en la generación aleatoria de ángulos. La simulación por ordenador creo que es impecable.

En tu demostración afirmas que la probabilidad del ángulo B está condicionada a la del A. No creo que esto sea así, la única dependencia entre A y B es que no deben sumar más de 180º, pues en ese caso no es posible la existencia del triángulo y si el triángulo no existe sería ocioso investigar su obtusangulidad.

Navegando por **Internet** descubro que en la revista **Mathematics Magazine,** Volumen 66, número 3, páginas 175-179, año 1993, aparece un artículo de Richard K. Guy con este sugestivo título: ***There Are Three Times as Many Obtuse-Angled Triangles as There Are Acute-Angled Ones.*** Desgraciadamente no aparece su contenido**,** solamente el siguiente comentario: *In fact almost all triangles are obtuse angled, as you will see if you draw one side, AB (Figure 1) and then decide where to put the third vertex, C. Unless you put it in the shaded region, which constitutes a negligible fraction of the whole plane, you'll get an obtuse triangle. How can we get a more realistic estimate?* ***Five distinct "proofs" of the statement of the title are given****. The problem was earlier discussed by Woolhouse, Lemoine, Fourrey,* ***Lewis Carroll****, and Sylvester.*

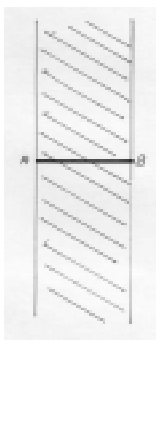
Yo estaba en la creencia de que el problema era de mi invención, pero por lo visto ya se lo plantearon varios matemáticos entre ellos nada menos que nuestro patrón **Lewis Carroll**.

¿Seguiremos hablando de este tema? Probablemente —con probabilidad de 0,75— sí.

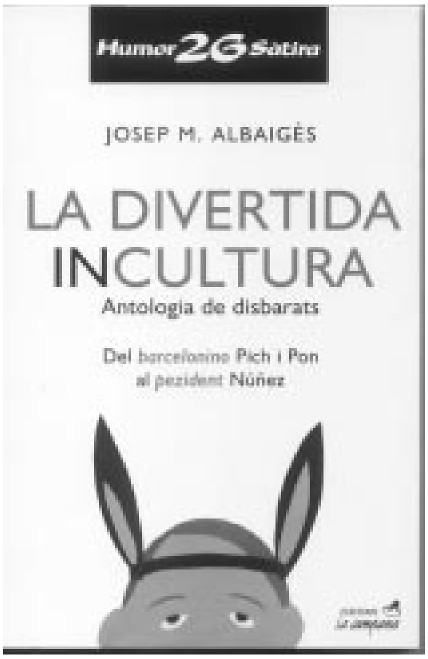
Nuevos razonamientos míos:

Creo que el problema real está, pues, en ponerse de acuerdo sobre qué se entiende por “triángulo aleatorio”. Podríamos definirlo de muchas otras maneras. A título de ejemplo he ensayado con el ordenador varias por el método de Monte-carlo:

1. Defino los ángulos A, B, C al azar de la siguiente manera: tomo valores entre 0 y 1, y los prorrateo seguidamente para que sumen 180. La probabilidad es 0,50.
2. Los defino ahora tomando al azar A entre 0 y 180, B al azar entre 0 y 180 - A. La probabilidad parece situarse hacia 0,93.
3. Tomo al azar tres puntos en el plano dentro de un cuadrado de lado cualquiera. La probabilidad es ahora 0,80.
4. Los tomo al azar en el espacio dentro de un cubo. Ahora es p = 0,55.
5. Todavía hay otro método más contundente: escoger un lado aleatoriamente y tomar el tercer punto al azar en el plano. El triángulo sólo será obtusángulo si éste cae en la zona rayada de la figura, conque la probabilidad de *obtusangulidad* vale ahora... ¡1! A este caso se refería Guy.



El problema, en su base no es tan distinto del famoso de la cuerda a un círculo, en el que la probabilidad de que sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito varía según la tomemos paralela a un diámetro, que pase por un punto fijo, etc. Todos los resultados son correctos en cuento se desarrolla el punto de partida, pero éste es motivo de elección, sin que haya razones para preferir un criterio a otro.



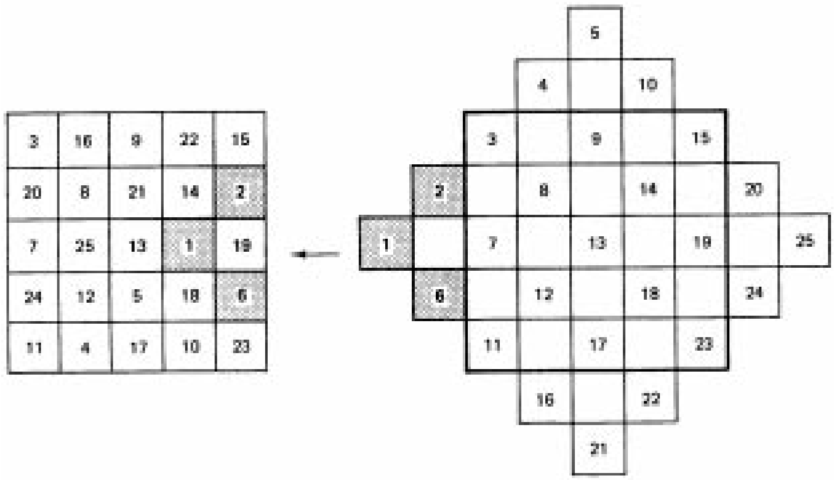
De todos modos, me gustaría conocer el razonamiento de Guy. Quizá podríamos escribirle para zanjar la discusión.

Y, antes de terminar, perdonadme por hacerme por una vez autopropaganda. ¿Recordáis el número 18 del BOFCI, sobre las piquiponianas? Éstas han sido recogidas, con las de otros ilustres cultivadores del mismo género, en el libro *La divertida incultura*, que recientemente ha publicado las *Edicions La Campana*, de Barcelona. Doy la muestra por si a alguno le interesa, advirtiendo que el libro está en catalán. Como diría el ilustre Pich, "este libro viene a *aportar un vacío* a la literatura de fin de siglo".

Hasta el próximo milenio.

CUADRADOS MÁGICOS IMPARES A MOGOLLÓN

Bachet de Méziriac descubrió un método muy sencillo para fabricar cuadrados mágicos d edimensión impar. Apliquémoslo a uno de 5×5:



Ampliemos el cuadrado para formar uno nuevo “en diamante”. Se numeran después las “diagonales” paralelas a la que va del extremo izquierdo al extremo superior en la forma que indica la figura de la derecha. Si ahora imaginamos que los cuadrados sombreados se introducen, sin alterar su orden, por el opuesro (como se ha hecho con los cuadrados punteados) se obtiene un cuadrado de 5×5.

Claro que de ahí no salen todos los cuadrados posibles (de lado 5, son 275305224 nadamenos). Pero vale para cualquier lado impar.

JMAiO, ago 00

CUBOS E HIPERCUBOS MÁGICOS

Desconozco el estado actual de la investigación sobre cubos mágicos. No existen para los órdenes menores, si bien existen los cubos semimágicos. Así, de orden 3×3×3:

23	3	16
7	14	21
12	25	5

1	17	24
15	19	8
26	6	10

18	22	2
20	9	13
4	11	27

O de 4×4×4:

4	45	29	52
57	24	40	9
53	28	44	5
16	33	17	64

62	19	25	14
7	42	26	55
11	38	22	59
50	31	47	2

63	18	34	15
6	43	27	54
10	39	23	58
51	30	46	3

1	48	32	49
60	21	37	12
56	25	41	8
13	36	20	61

De hecho, se ha demostrado que no existen cubos totalmente mágicos de 3×3×3 ni de 4×4×4. Nada se sabe de los de 5×5×5, 6×6×6 y 7×7×7.El más bajo que conozco totalmente mágico es de orden 8x8x8. Fue descubierto en 1979 por Lewis Myers y publicado en [C-25].

19	497	255	285	432	78	324	162
303	205	451	33	148	370	128	414
336	174	420	66	243	273	31	509
116	402	160	382	463	45	291	193
486	8	266	236	89	443	181	343
218	316	54	472	357	135	393	107
185	347	85	439	262	232	490	12
389	103	361	139	58	476	214	312

381	159	401	115	194	292	46	464
65	419	173	335	510	32	274	244
34	452	206	304	413	127	369	147
286	256	498	20	161	323	77	431
140	362	104	390	311	213	475	57
440	86	348	186	11	489	231	261
471	53	315	217	108	394	136	358
235	265	7	485	344	182	444	90

134	360	106	396	313	219	469	55
442	92	342	184	5	487	233	267
473	59	309	215	102	392	138	364
229	263	9	491	346	188	438	88
371	145	415	125	208	302	36	450
79	429	163	321	500	18	288	254
48	462	196	290	403	113	383	157
276	242	512	30	175	333	67	417

492	10	264	230	87	437	187	345
216	310	60	474	363	137	391	101
183	341	91	441	268	234	488	6
395	105	359	133	56	470	220	314
29	511	241	275	418	68	334	176
289	195	461	47	158	384	114	404
322	164	430	80	253	287	17	499
126	416	146	372	449	35	301	207

306	212	478	64	141	367	97	387
14	496	226	260	433	83	349	191
109	399	129	355	466	52	318	224
337	179	445	95	238	272	2	484
199	293	43	457	380	154	408	118
507	25	279	245	72	422	172	330
412	122	376	150	39	453	203	297
168	326	76	426	283	249	503	21

96	446	180	338	483	1	271	237
356	130	400	110	223	317	51	465
259	225	495	13	192	350	84	434
63	477	211	305	388	98	368	142
425	75	325	167	22	504	250	284
149	375	121	411	298	204	454	40
246	280	26	508	329	171	421	71
458	44	294	200	117	407	153	379

423	69	331	169	28	506	248	278
155	377	119	405	296	198	460	42
252	282	24	502	327	165	427	73
456	38	300	202	123	409	151	373
82	436	190	352	493	15	257	227
366	144	386	100	209	307	61	479
269	239	481	3	178	340	94	448
49	467	221	319	398	112	354	132

201	299	37	455	374	152	410	124
501	23	281	251	74	428	166	328
406	120	378	156	41	459	197	295
170	332	70	424	277	247	505	27
320	222	468	50	131	353	111	397
4	482	240	270	447	93	339	177
99	385	143	365	480	62	308	210
351	189	435	81	228	258	16	494

Nuestro impagable Miguel Á. Lerma publicó, ya en aquellos años del [C-9], algunos tesaractos semimágicos e incluso el programa para calcularlos. Así, de 3×3×3×3:

67	9	47
48	68	7
8	46	69

3	50	70
71	1	51
49	72	2

53	64	6
4	54	65
66	5	52

26	37	60
58	27	38
39	59	25

40	63	20
21	41	61
62	19	42

57	23	43
44	55	24
22	45	56

30	77	16
17	28	78
76	18	29

80	10	33
31	81	11
12	32	79

13	36	74
75	14	34
35	73	15

Y otro más de quinto orden: 3×3×3×3×3:

26	199	141
139	27	200
201	140	25
202	144	20
21	203	142
143	19	204
138	23	205
206	136	24
22	207	137

148	9	209
210	149	7
8	208	150
3	212	151
152	1	213
211	153	2
215	145	6
4	216	146
147	5	214

192	150	16
17	190	159
157	18	191
161	10	195
193	162	11
12	194	160
13	198	155
156	14	196
197	154	15

111	77	178
179	109	78
76	180	110
80	172	114
112	81	173
174	113	79
175	117	74
75	176	115
116	73	177

188	118	60
58	189	119
120	59	187
121	63	182
183	122	61
62	181	123
57	185	124
125	55	186
184	126	56

67	171	128
129	68	169
170	127	69
165	131	70
71	163	132
130	72	164
134	64	168
166	135	65
66	167	133

229	90	47
48	230	88
89	46	231
84	50	232
233	82	51
49	234	83
53	226	67
85	54	227
228	86	52

30	239	97
98	28	240
238	99	29
242	91	33
31	243	92
93	32	241
94	36	236
237	95	34
35	235	96

107	37	222
220	108	38
39	221	106
40	225	101
102	41	223
224	100	42
219	104	43
44	217	105
103	45	218

JMAiO, ago 00

DOS PROBLEMAS DE JOSÉ ANTONIO DE ECHAGÜE

EL DILEMA DE LA TRAICIÓN

Con esta o parecida denominación suelen nombrarse un conjunto de problemas de decisión, ya clásicos. En su origen se plantean de la siguiente forma, que admite diversas variantes.

Dos sospechosos de un delito son llevados ante el tribunal que les juzga. Han de contestar, por separado, a una simple pregunta: ¿Es su compañero el autor del delito? Si uno dice que su compañero es inocente, pero el compañero dice que el otro es culpable, éste carga con toda la pena. Si ambos se acusan mutuamente ambos pagan, pongamos por caso, una pena doble. Pero si ambos se declaran recíprocamente inocentes salen libres. Supuesto que no tienen posibilidad de concertar previamente sus declaraciones, ¿cuál es la estrategia óptima para cada uno? El problema tiene muchas aristas de tipo matemático y psicológico, y no es fácilmente resoluble a base del típico criterio "minimax".

El escritor siciliano Gesualdo Bufalino, en su estupenda narración "Las mentiras de la noche",(1) ofrece una notable va-riante de este problema. Mediados del si-glo XIX. En una fortaleza borbónica, cua-tro revolucionarios garibaldinos esperan su ejecución ese amanecer, condenados por sedición contra a el rey. La noche de vela, ya en capilla, el sádico gobernador se presenta y les ofrece un "pacto" que no deben ni pueden rechazar. En una pieza contigua dejará durante la noche recado de escribir, cuatro tarjetas blancas y una urna cerrada y opaca. Cada condenado debe introducir una tarjeta en la que, si quiere, pondrá el nombre del jefe de la conjura antiborbónica. Si no quiere traicionar que ponga cualquier cosa, incluso puede desahogarse con un insulto. Por la mañana, antes de la ejecución, el gobernador abrirá la urna. Si hay una sola papeleta con el nombre del jefe, todos menos éste quedan libres. En otro caso todos serán guillotinados. Cada uno debe decidir si vale más su honor de no traicionar (cosa que solo sabrá él mismo) que su vida. Por supuesto se puede correr el riesgo de salvar el honor, con la secreta esperanza, evidentemente insegura, de que otro de los cuatro tenga más instinto de conservación.

El gobernador les reta a ser tan valientes como demostraron al atentar contra el soberano. Si no se avienen al juego, desde luego serán ejecutados, y a su juicio con deshonor por no haber querido poner a prueba su temple. Supuesto que cada cual valora en X puntos su vida y su honor, ¿Cuál sería la estrategia favorable?. ¿Existe al menos una forma sensata de plantear su solución? Ánimo, hay tiempo hasta el amanecer.

(1) Ed. Anagrama Col. *Compactos*, 1998

SELECCIONAR A LA/EL MEJOR (?)

La reproducción en el número 66 de © del artículo de *Expansión* titulado "Una Liga sin partidos" me sugiere varias ideas y experiencias afines. En general este tipo de cuestiones paradójicas, frecuentes en política: coaliciones, actividades parlamentarias, toma de decisiones, etc., suelen estar muy relacionadas con las "relaciones no transitivas", estudiadas y formalizadas por Kenneth J. Arrow, economista matemático, Premio Nobel de 1.972. Un día enviaré unas notas que tengo a medio hacer este tema.

De inmediato recuerdo el curioso problema, absolutamente real, que se le planteó a un amigo, ingeniero de organización,en una selección de personal para formar un equipo.

Se trataba de formar un equipo de cuatro personas, lo más homogéneo posible, y con las mayores calificaciones, para una tarea de gran responsabilidad.

Después de la selección inicial quedaron cinco candidatos que indudablemente desta-caban sobre los demás. Era pues necesario eliminar a uno de ellos. Los aspectos a considerar eran los siguientes (en reali-dad es lo mismo que signifiquen real-mente):

A)Formación; B) Experiencia; C) Capaci-dad de trabajo en equipo; D) Habilidad en manejo de personas; E) Estabilidad emocio-nal. Los resultados tabulados fueron los siguientes, entendiendo por "uno" el cum-plimiento a plena satisfacción del requi-sito, y por "cero", una calificación menos satisfactoria:

Candidatos	A	B	C	D	E
José	1	0	1	1	1
Begoña	1	1	1	1	0
Jordi	0	1	1	1	1
Nuria	1	1	1	1	1
Xabier	1	1	1	0	1

Y bien, ¿a quién eliminar, de forma racional y justa? El asunto tiene ma arregio. Se admiten opiniones.

J.A.E.

EL ACENTO EN LAS TERMINACIONES EN –ON/-ÓN

Antes de la reforma ortográfica del DRAE de 1808 no había una norma clara establecida sobre la acentuación. En las palabras terminadas en *–ón*, tan caracterísiticas del castellano, y casi todas agudas, por lo común se consideraba inútil explicitarlo.

¿Estaba esto justificado? En el DRAE se contabilizan 4156 palabras terminadas en *–ón*. En cambio las terminadas en *–on* son sólo 48 (un 1,14 % del total en *–on/-ón*), concretamente éstas:

acromion	con	ípsilon	plancton
aron	corion	isquion	pleon
asíndeton	chiton	nailon	poliptoton
badminton	épsilon	necton	polisíndeton
bádminton	eslalon	nemon	rémington
beicon	fitoplancton	neuston	ron
bon	fon	newton	sine qua non
bustrofedon	gnomon	nomon	son
bustrófedon	hipérbaton	ómicron	telson
canon	hipomoclion	parergon	tetragrámaton
claxon	ilion	pereion	ton
colon	ion	peticanon	zooplancton

Salvo algún monosílabo y alguna voz de procedencia extranjera, prácticamente todos son cultismos griegos. Parece pues justificada la forma de escribir comentada, y quizá podría plantearse si no merecería la pena regresar a ella.

Josep M. Albaigès

EL AÑO DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS BILLETES DE METRO

El año 2000, proclamado de las Matemáticas, ha tenido muchos ecos en diversos ámbitos. Uno de los más curiosos ha sido los billetes de metro y autobús emitidos por el *Servicio Municipal de Transportes* de Barcelona, donde se recogen en esquemáticos dibujitos algunas de las proposiciones más conocidas de la ciencia exacta.

En la ilustración vemos una de ellas, correspondiente a la determinación del circuncentro de una circunferencia. Trazando la mediatriz del segmento AB, es por definición OA=OB. En otra mediatriz a BC, es OB=OC. Por tanto, OA=OC, y el punto O pertenece la mediatriz de AC. Las tres mediatrices concurren en un punto, y éste equidista de A, B, y C, por lo que por éstos pasa una circunferencia con centro en O, la llamada *circunscrita* al triángulo ABC. Por cierto que el radio de ésta vale **R=abc/4S**, siendo S el área del triángulo.

El obtusángulo ataca de nuevo.

En [C.55] apareció un artículo titulado "**Un problema para obtusos**" que trataba del siguiente problema: Supongamos un triángulo obtenido al azar, ¿qué probabilidad tiene de ser obtusángulo?
Esta probabilidad resultaba ser del 75%. Las dos pruebas aportadas eran un tanto enrevesadas. Pasado el tiempo encontré otra demostración que, de ser correcta, parece más sencilla: Para que un triángulo sea obtusángulo basta con que uno de sus tres ángulos **A**, **B**, o **C**, sea obtuso. La probabilidad $\mathbf{P_1}$ de que el ángulo **A** sea obtuso es 90º/180º = **1/2**. Ahora bien, si **A** no es obtuso podrían serlo el **B** o el **C** (probabilidades mutuamente excluyentes, ya que si uno es obtuso el otro no lo será). La probabilidad de que **B** sea obtuso, condicionada a que **A** sea agudo es: $\mathbf{P_2} = 1/2 \times 1/2 = \mathbf{1/4}$.
La probabilidad buscada será pues: $\mathbf{P} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} = \mathbf{3/4}$.

En este problema no interviene para nada el tamaño que pueda tener el triángulo, éste quedará perfectamente definido tan pronto como demos valor a dos de sus ángulos, por ejemplo el **A** y el **B**, ya que el **C** sería igual a **180º - (A+B).** Así pues, conseguir un triángulo al azar consistirá en obtener al azar dos de sus ángulos cuya suma ha de ser inferior a 180º.

Podemos simular, con la ayuda de un ordenador, la generación al azar de los dos ángulos **A** y **B**; el mismo programa investigará si el triángulo resultante es o no obtuságulo. Generaremos así tantos triángulos al azar como nos venga en gana y hallaremos la relación entre casos favorables (en que el triángulo resulta ser obtuságulo) y casos totales. Con el programa en BASIC que expongo a continuación el ordenador ha examinado **10.000.000** de casos y ha obtenido como valor de la probabilidad buscada **75,00846%** es decir prácticamente 75%, valor que coincide con la probabilidad que habíamos calculado teóricamente.
Convencido plenamente de que el obtusángulo es tres veces más probable que el acutángulo mi espíritu ha quedado tranquilo y sosegado.

```
10 CLS : RANDOMIZE (TIMER)
20 INPUT "Número de pruebas :" , NP
30 FOR N = 1 TO NP
40 X = 180*RND(1) + 1 : Y = 180*RND(1) + 1
50 IF Y < X THEN
        A = X - Y
        B = Y
        C = 180 - X
        IF A > 90 OR B > 90 OR C > 90 THEN CNT = CNT + 1
        END IF
60 IF Y > X THEN
        A = X
        B = Y - X
        C = 180 - Y
        IF A > 90 OR B > 90 OR C > 90 THEN CNT = CNT + 1
        END IF
70 P = CNT/N
80 LOCATE 3,1 : PRINT "Prueba nº        : " ; N
90 LOCATE 5,1 : PRINT "Probabilidad       : " ; P
100 NEXT
```

Aristogeronte
Madrid, junio de 2000.

EL PROBLEMA DE ÁLEX Y DAVID

Dos amigos, Alex y David, salen de sus casas corriendo con intención de encontrarse. Sus relojes marcan las doce del mediodía. Alex corre el doble que David. Cuando se encuentran, el reloj de Alex marca las 12,30 y el de David, que adelanta, señala un minuto más. Al día siguiente repiten la experiencia. David pone en hora su reloj. Alex retrasa su salida diez minutos y corre a la mitad de velocidad que su amigo. ¿Qué hora marcará el reloj de David cuando se junten?

(Solución en la siguiente página)

ESCRITURA VECINAL

Llamaremos "escritura vecinal" a la que se practica pulsando consecutivamente siempre teclas contiguas de la máquina de escribir.

El repertorio de palabras del DRAE escribibles por ese método es más bien escaso. Una investigación computerizada da las siguientes:

as	**ju**
asa	**lo**
asaz	**ol**
aza	**olopopo**
de	**polo**
des	**pololo**
desa	**pop**
desde	**re**
dese	**red**
ere	**res**
es	**saz**
esa	**se**
esas	**sed**
ese	**sede**
eser	**ser**
frere	**ses**
fres	**tres**
fresa	**uh**
hu	**yuy**
huy	**za**
ijujú	**zas**
io	**zaza**
ji	

Algunas son ciertamente rebuscadas, pero todas están en el DRAE. La lista podría ser más larga usando tiempos verbales, plurales, diminutivos, etc.

Josep M. Albaigès, marzo 2000

LA FUNCIÓN LIBIDÍNEA

¡Otro chascarrillo matemático-verde! Recuerdo algunos fragmentos desde mi época de estudiante:

Sean dos variables en principio independientes, **pp** y **pπ**, pero que pronto van a depender una de otra.

En efecto, en cuanto las situamos aco(s)tadas en un recinto rectangular Γ (*camma*), enseguida se verifica que:

$$pp \to p\pi$$

Y a la vez

$$p\pi \to pp$$

Con lo cual se forma inmediatamente:

$$\sum_{1}^{n}\begin{pmatrix} pp \\ p\pi \end{pmatrix}$$

Nota: Aunque en principio *n* puede tomar cualquier valor, empíricamente se comprueba que siempre n < 7. Si se fuerza este límite, existe el peligro de que **pπ** se haga **ππ**.

JMAiO, enero 2000

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE ALEX Y DAVID

Sea v la velocidad de David; la de Álex será *2v*. El tiempo de ambos, medido en horas, es ½.

En el segundo recorrido, la velocidad de Álex es *v/2*, y si el tiempo corrido por David es *t*, el de Álex es *t – 1/6*. Será por tanto:

$$2v \cdot \frac{1}{2} + v \cdot \frac{1}{2} = \frac{v}{2}\left(t - \frac{1}{6}\right) + vt$$

De donde se deduce rápidamente que $t = 7/12$ *horas*

El reloj de David marcará por tanto $12 + \frac{31}{30}\frac{7}{12} = 12 + \frac{217}{360}\mathit{horas} = 12^{h}36^{m}10^{s}$

JMAiO, sep 00

LAS HERMANAS GILDA

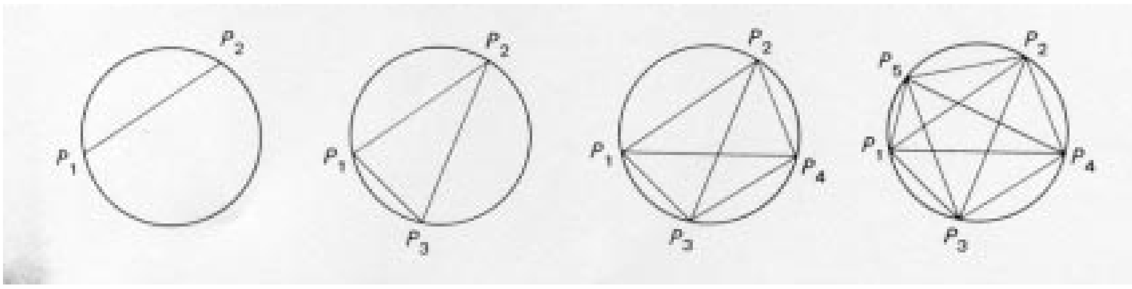
Veo con cierta ternura que el servicio de Correos recupera mitos perdidos para su conocimiento por las generaciones actuales. En el sello que ilustra esta nota aparecen las "Hermanas Gilda" (Leovigilda y Hermenegilda), personajes de la revista infantil *Pulgarcito*.

La primera, colérica, mandona y andrógina, la segunda, eterna gordita feliz en busca de su príncipe azul, pero sometida al despótico carácter de su hermana. Sus nombres fueron creados hacia 1950 inspirándose en la película *Gilda*, de Rita Hayworth, que tanto escándalo causó entonces. Una de las consecuencias del filme fue la aparición de una nueva palabra: "Es una *gilda*", se decía de una mujer despampanante. La aplicación del calificativo a las dos pobres hermanas subraya el carácter irónico de los personajes, acentuado por la adopción de los nombres, correspondientes a dos figuras históricas de la época goda, que a la fuerza había que aprenderse en el cole.

JMAiO, oct 00

LOS PELIGROS DE LA INDUCCIÓN INTUITIVA

Los libros de problemas de Mensa abundan en cuestiones como la siguiente: "Dada la sucesión 1,2,4,8,16…, averiguar el término siguiente".



Antes de contestar de forma precipitada, obsérvese el gráfico adjunto. En él se dibujan las regiones en que queda dividido un círculo tras trazar todas las rectas pos9ibles que conectan dos, tres, cuatro, cinco puntos, y responden a los valores anteriores. ¿Cuántas regiones aparecerán al elegir un sexto punto? ¿Y un séptimo?

Me advertía un profesor de Matemáticas en mis años mozos que "la intuición es fuente constante de error". Y a error nos conduciría la fácil conclusión de que la sucesión responde a la fórmula $u_n = 2^{n-1}$.

Pues en efecto, al elegir un sexto punto, ¡el término resultante es 31! El número de regiones definidas por *n* puntos responde a la fórmula:

$$E(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1 = \frac{n^3 + 6n^2 - n + 18}{24}$$

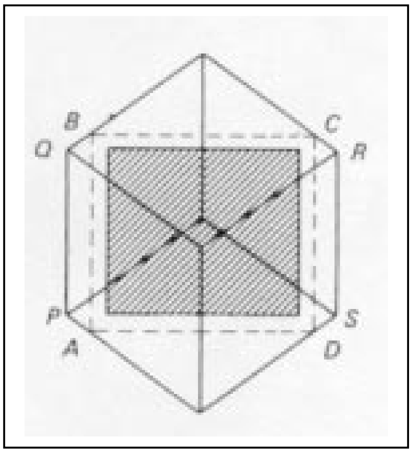
Al avanzar en la sucesión, ésta diverge cada vez más de los valores intuidos, como se ve en el cuadro:

n	***E(n)***	2^{n-1}
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	8	8
5	16	16
6	31	32
7	57	64
8	99	128

JMAiO, ago 00

¿PASAR UN CUBO A TRAVÉS DE OTRO CUBO IGUAL?

¿Es posible practicar un orificio en un cubo por el que pueda pasar otro cubo igual?



Sí es posible. Si obserfvamos el cubo “de punta” (esto es, con la visual en la dirección de la diagonal principal; para mayor claridad, se ha dibujado un poco desviada) veremos la figura adjunta, que es un hexágono regular cuyo lado es el del cubo.

Dado el rectángulo punteado, BC puede ser tan próximo como queramos a la diagonal de una cara, y AB será siempre mayor que el lado. Por tanto, en su interior cabe un cuadrado de lado igual al del cubo. Perforando éste según el cuadrado, otro cubo pasará perfectamente por el orificio.

JMAiO, sep 00

Retos matemáticos del Instituto Clay para el siglo XXI

P frente a NP

Un problema se dice que es de "decisión" si se puede resolver con un "sí" o un "no", por ejemplo "¿es 184800416805574528952927 un número compuesto?" La clase P consiste en los problemas de decisión que son fáciles de resolver, por ejemplo "¿es N un número par?" (basta mirar la paridad de la última cifra). La clase NP la componen los problemas en los que una respuesta afirmativa es, en principio, fácil de verificar, por ejemplo "¿es N un número compuesto?" (si la respuesta es afirmativa se podría verificar por ejemplo mostrando dos números a y b mayores que 1 cuyo producto sea N). Nótese que una solución fácil de verificar no es necesariamente fácil de hallar (por ejemplo, sin una pista como los factores de N no es claro que podamos responder rápidamente la pregunta "¿es N un número compuesto?"). Por lo tanto la clase de problemas NP es probablemente más amplia que la P, sin embargo nadie ha podido demostralo hasta ahora.

Conjetura de Hodge

En el siglo XIX se descubrieron técnicas para investigar la forma de complicados objetos geométricos a base de considerarlos formados por bloques simples de dimensión creciente. La teoría resultó ser tan útil que se generalizó a otros campos, pero al precio de perder la intuición geométrica inicial. La conjetura de Hodge enuncia un resultado de este tipo en un terreno más bien abstracto. Su formulación precisa dice lo siguiente: "En una variedad no singular proyectiva sobre los números complejos, toda clase de Hodge es una combinación lineal racional de clases cl(Z) de ciclos algebraicos."

Conjetura de Poincaré

Imaginemos que consideramos equivalentes dos objetos cuando es posible deformar contínuamente (sin pegar ni cortar) uno de ellos hasta formar el otro. Por ejemplo un balón de rugby será equivalente a un balón de fútbol, y una taza con un asa es equivalente a una rosquilla. Sin embargo una rosquilla no es equivalente a un balón, la rosquilla no se puede deformar contínuamente hasta formar un balón, porque la rosquilla tiene un agujero y necesitamos cortarla para hacerlo desaparecer.

En este sentido una superficie esférica se puede caracterizar como una superficie cerrada sobre sí misma y sin agujeros. La conjetura de Poincaré dice que es posible establecer una caracterización similar para hipersuperficies esféricas de dimensiones superiores. Dicha conjetura ha sido demostrada para todas las dimensiones mayores que 3 (y por supuesto para dimensiones 1 y 2), pero continúa abierta en dimensión 3.

Hipótesis de Riemann

La función $z(s) = 1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \ldots$ está bien definida y converge para todo número complejo s cuya parte real es mayor que 1. La llamada función zeta de Riemann es la prolongación analítica de la función de arriba a todo el plano complejo. Se sabe que z(s) vale cero en los números pares negativos (ceros "triviales"), y que sus restantes ceros (no triviales) están confinados en la franja $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, donde Re(s) representa la parte real de s. Sin embargo todos los ceros no triviales de z(s) que se han podido encontrar están en la línea $\mathrm{Re}(s)=1/2$. La conjetura de Riemann dice que *todos* los ceros no triviales de z(s) están de hecho en esa línea.

La Hipótesis de Riemann tiene consecuencias importantes en diversas ramas de la Teoría de Números, por eso su demostración se considera un importante tema pendiente.

Muchos teoremas establecen resultados que se podrían mejorar automáticamente si la Hipótesis de Riemann fuera cierta. Dichos teoremas están redactados así: "Blah, blah, blah, pero si la Hipótesis de Riemann es cierta entonces blah, blah, blah". Tan pronto como la Hipótesis de Riemann se consiguiera demostrar, los enunciados de todos esos teoremas se simplificarían automáticamente.

Teoría de Yang-Mills

La teoría de Yang-Mills es el marco matemático en el que se desarrolla la cromodinámica cuántica (teoría de los quarks) y otras teorías cuánticas de campos. El problema consiste en dar un fundamento matemático riguroso en el marco de esa teoría a ciertas propiedades de las interacciones nucleares fuertes, tales como el hecho de que son de corto alcance (esto implica que hay una laguna de masa o *mass gap*, es decir, toda excitación del vacío debe poseer una energía por encima de cierto mínimo) y el confinamiento de los quarks (no es posible observar quarks aislados).

Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen la dinámica de un fluido incompresible. Dichas ecuaciones ligan las velocidades de las partículas del fluído, su viscosidad, presión y fuerza exterior aplicada (digamos, la de gravedad). Las soluciones deben verificar ciertas condiciones iniciales, más ciertas restricciones diseñadas para asegurar que las soluciones son físicamente significativas.

El problema consiste básicamente en estudiar la existencia y diferenciabilidad de las soluciones de estas ecuaciones.

Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

La formulación precisa de este problema es demasiado técnica, pero sus consecuencias son fáciles de entender. Antes de que Wiles probara el último teorema de Fermat el mejor resultado obtenido hasta la fecha era una consecuencia del teorema de Faltings ("toda curva algebraica de género mayor que 1 tiene un número finito de puntos racionales"), el cual implicaba que la ecuación de Fermat para $n>2$ (y muchas otras ecuaciones diofánticas similares) tiene a lo sumo un número finito de soluciones no triviales. Así pues para una amplia clase de ecuaciones diofánticas sabemos que su número de soluciones es finito, pero no disponemos de ningún procedimiento para hallar dichas soluciones (caso de que haya alguna). La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer proporcionaría un método efectivo para hallar tales soluciones.

Para más informacion ver:

http://www.claymath.org/prize_problems/index.htm

Miguel A. Lerma

SOLRESOL

Lenguaje musical universal

Introducción

La búsqueda de la lengua perfecta es la historia de una utopía, la persecución de un sueño imposible que se ha mantenido a lo largo de los siglos. Cuando la unidad político-lingüística del Imperio Romano se hunde y se empiezan a formar las lenguas que todavía hoy se hablan en Europa, la cultura europea rememora el episodio bíblico de la *confusio linguarum* babélica, tratando de recuperar y reconstruir la lengua perfecta.

Algunas de las más grandes personalidades de la cultura europea (Dante, Llull, Kircher …) se dedicaron a ello; sus investigaciones, a menudo sorprendentes y sumamente complejas (pansemiótica, cabalística, estenografías, poligrafías, etc.) no consiguieron los objetivos que pretendian, pero produjeron unos efectos colaterales que han influido en la cultura y las ciencias actuales. La taxonomía de las ciencias naturales, la lingüística comparada, los lenguajes formalizados, los proyectos de inteligencia artificial y las investigaciones de las ciencias cognitivas son, en gran parte, fruto de este anhelo para recuperar la lengua de Adán.

La cantidad de proyectos sobre la lengua perfecta que han surgido a lo largo de la historia es inmensa. Desde la reconstrucción de lenguas presumiblemente originarias o lenguas madre, más o menos fantásticas, hasta la categoría de los "locos" obsesionados, glotomaníacos, pasando por las construidas artificialmente, las màgicas (redescubiertas o construidas), las oníricas (formuladas por locos, o en trance, las de revelaciones místicas como la Ignota Lengua de Santa Hildegarda de Bingen), las novelescas o poéticas, ficticias (Tolkien), creadas con finalidades satíricas (Rabelais, Orwell …) , las *bricolage* (que nacen espontáneamente del cruce de dos civilizaciones de lenguas distintas, como en las áreas coloniales), las formales de un ámbito de uso restringido (química, álgebra, lógica), etc…

SOLRESOL

En 1827 el maestro de música francés Jean François Sudre (1787-1864) inventa el **SOLRESOL** (Langue musicale universelle). Sudre considera que las siete notas diatónicas pueden representar un alfabeto que tiene la posibilidad de ser comprendido por todos los pueblos (se puede escribir de la misma manera en todas las lenguas). Pude ser hablado, cantado, silbado o interpretado con un instrumento.

Así, pues, en este lenguaje las palabras forman pequeñas melodías. Normalmente se representan mediante las iniciales de las notas. Por ejemplo, **solresol** se escribirá SRS. Con una nota se pueden expresar palabras como «sí» (*si* musical) o «no» (*do*), con dos notas, «mío» (*redo*) y «tuyo» (*remi*), con tres, palabras de uso común como «tiempo» (*doredo*) o «día» (*doremi*), etc.

A partir de aquí, Sudre decide expresar los contrarios por medio de la retrogradación, de manera que si *domisol*, acorde perfecto mayor es Dios, su inversión, *solmido*, será Satanás; *misol*, el bién, *solmi*, el mal; *fala*, bueno, *lafa*, malo; *solla*, siempre, *lasol*, nunca, etc…

Sudre planificó el sistema de la siguiente manera:

7	palabras de una nota
49	palabras de dos notas
336	palabras de tres notas
2268	palabras de cuatro notas
9072	palabras de cinco notas

- La separación entre palabras, pequeñas pausas
- Participios y pronombres, combinaciones de dos notas
- Palabras más comunes, combinaciones de tres notas
- Siete clases de palabras de cuatro notas, llamadas tonos, según la nota inicial. Por ej., el tono de Do, contiene palabras que representan aspectos físicos y morales
- Combinaciones de cinco notas representan los nombres de tres categorías: animales, vegetales y minerales

A continuación expongo unos cuantos ejemplos, al azar, sacados del diccionario SOLRESOL- Inglés.

Palabras de una Nota

D	no
R	y
M	o
F	a
S	si condicional
L	el, la
T*	sí

* La nota SI se representa con la T, para no confundirla con la S de Sol.

Palabras de Dos Notas

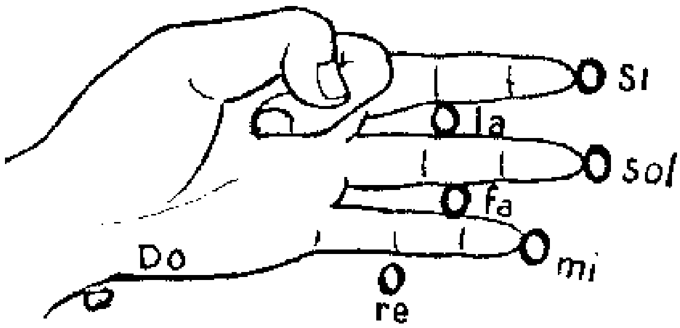
DR	yo, nosotros, vosotros
DM	tú
DF	él
DS	yo mismo, tu mismo, él mismo …
RD	mío, tuyo
RM	suyo, suyos

Palabras de Tres Notas

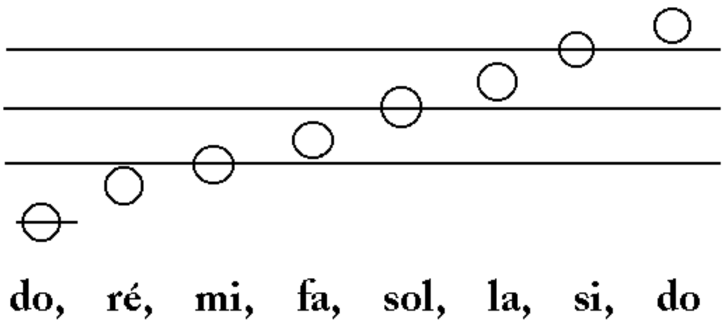
DDR	tierra
DDM	estación
DDF	invierno
DDS	primavera
DDL	verano
DDT	otoño
FRL	correo
SDD	domingo

Otro manera de utilizar el SOLRESOL, es mediante las manos. Con la mano derecha se tocan unos puntos determinados de la mano izquierda que representan una nota.

Veamos la ilustración:



Los tres dedos representan el "trigrama" usado por el SOLRESOL, ya que solamente trabaja con una octava.



Parece ser que solamente existen dos libros publicados sobre SOLRESOL, ambos en francés:

- Sudre, Jean Francois (1798-1866??)
  Langue musicale universelle
  Paris: 1866 (480+ p.)
  PM 8008.S94

- Gajewski, Bolaslas
  Grammaire du Solresol, ou langue universelle de Fr. Sudre
  Paris: 1902 (44 p.)

GRAMMAIRE
DU
SOLRÉSOL
ou Langue Universelle
de François SUDRE
PAR
BOLASLAS GAJEWSKI, *Professeur*

Durante el siglo XIX, fue bastante popular hasta el punto que el ejército francés jugó con la idea de usarlo como medio de comunicación en las batallas, pero finalmente desistió debido a las dificultades obvias. El sistema añade a las dificultades propias de cualquier idioma, la necesidad por parte de los hablantes de tener buen oído. En cierto modo, retorna a la mítica lengua de los pájaros de resonancia del s. XVII, pero con menos belleza y mucho más formalismo codificador.

Couturat y Leau, dos personalidades del campo de la lingüística, consideraron el *Solresol* como «la más artificial y impracticable de todas las lenguas». Ni la numeración es accesible puesto que actúa con criterio hexadecimal y llega a la extravagancia francesa de omitir los números 70 y 90, en detrimento de la universalidad de su lengua. Sin embargo, Sudre, que trabajó durante cuarenta y cinco años en el perfeccionamiento del *Solresol*, obtuvo el reconocimiento del Instituto de Francia, de músicos tales como Cherubini, de Victor Hugo, Lamartine y von Humboldt, fue recibido por Napoleón III y se le otorgó una medalla de oro en la Exposición Universal de Londres de 1862.

Jesús Lladó – Barcelona, Octubre 2000

****

Bibliografía:

- La búsqueda de la lengua perfecta /Umberto Eco / Crítica-Grijalbo Mondadori
- Grammaire du Solresol, ou langue universelle de Fr. Sudre / Gajewski, Bolaslas
  Paris: 1902 (44 p.)

Internet:

Solresol Revival Project
www.ics.mq.edu.au/~gregb/solresol/

Conlags page
www.ptialaska.net/~srice/conlags.html

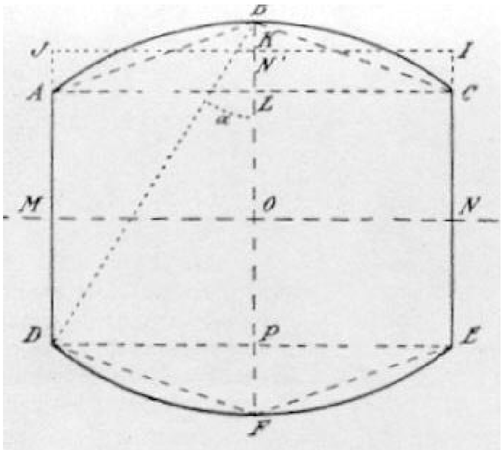
Stephen Rice
www.polarnet.com/~srice/index.html

Las ilustraciones forman parte de:

Grammaire du Solresol, ou langue universelle de Fr. Sudre / Gajewski, Bolaslas
Paris: 1902 (44 p.)

TONELERÍA COMPARADA

Alfredo Quesada ha reunido una colección singular: fórmulas que dan el volumen de un tonel. Nos hemos entretenido en compararlas para cotejar su grado de exactitud, y la primera dificultad ha sido homogeneizarlas para que todas dependan de los tres valores R = OF, r = MD, h = MN (v. figura). Para cotejarlas más fácilmente, las hemos escrito de forma que cada una de ellas consista en una expresión del tipo k• R^2h, donde k es un factor, al que llamaremos "coeficiente del tonel", y el resto es el volumen del cilindro circunscrito.



El factor k depende siempre de • = *r/R*, es decir, la relación entre los radios mínimo y máximo. También hemos hecho • = *h/R*, pero sólo en una fórmula se hace depender el volumen de esa relación.

Fuente: NUEVO DICCIONARIO ILUSTRADO SOPENA DE LA LENGUA ESPAÑOLA (1.970)

V = [(3,1415926 * h)/3] (2*R²+r²) $= \pi R^2 h \frac{2+\omega^2}{3}$

Fuente: IDEAS Y TRUCOS PARA CONOCER DATOS ÚTILES (Albert Seine) (Ediciones Robinbook)

V = 3,1415926 * h [r + 2/3 * (R – r)]² $= \pi R^2 h \left(\frac{2+\omega}{3}\right)^2$

V – Volumen
h – Altura del tonel
R – Radio mayor (centro del tonel)
r – Radio menor (extremos)

Fuente: MEMORIAL TÉCNICO (L. Mazzocchi Ing.) (Editorial Librería Dossat)

Fórmula de Oughtred:

Volumen = 0,262 . L (2 D²+ d²) $= \pi R^2 h \frac{2+\omega^2}{3}$

Fórmula de Dez:

Volumen = 0,785 . L [D- 3/8(D-d)]² $= \pi R^2 h \left(\frac{5+3\omega}{8} \right)^2$

Fórmula práctica:

Volumen = 0,087 . L (2D+d)² $= \pi R^2 h \left(\frac{2+\omega}{3} \right)^2$

Donde: L es la longitud interior, D el diámetro interior máximo y d el diámetro de los fondos.

Fórmula de Manuel García Ardura (*Formulario de matemáticas*, 1961):

Volumen = $0{,}2h(D+d)^2 = \pi R^2 h \cdot 0{,}255(1+\omega)^2$

Fórmula de A. L. Casilla (*Máquinas. Cálculos de taller*, Ediciones Máquinas). El autor supone la directriz parabólica:

Volumen = $0{,}209h(2D^2+Dd+¾d^2) = \pi R^2 h \cdot 0{,}266\left(2+\omega+\tfrac{3}{4}\omega^2\right)$

Fórmula de la Enciclopedia Cíclico-pedagógica de Dalmau Carles:

Volumen = $(5/8)\cdot d^3 = \pi R^2 h \frac{5}{8\pi} \frac{\left[(1+\omega)^2 + \tau^2/4\right]^{3/2}}{\tau}$

Donde: d es la distancia desde el tapón hasta el punto interior más alejado de él.

Lo primero que se observa es que la fórmula de Seine y la llamada "práctica" se reducen a la misma. En general, todas ellas hallan algún tipo de promedio entre las áreas máxima y mínima de las bases y la multiplican por la altura y por algún coeficiente.

Buscando hallar una fórmula objetiva basada en el cálculo integral, hemos hecho la suposición de que la curva generatriz del tonel es una parábola de grado n, es decir, que el valor del radio del tonel es en todo momento:

$$\rho = R - \alpha x^n$$

El cálculo integral proporcional la fórmula del volumen:

$$V = 2\int_0^{h/2} \pi \left(R - \alpha x^n\right)^2 dx$$

Desarrollando esa integral y poniendo el resultado en función de R, r, h y • llegamos a:

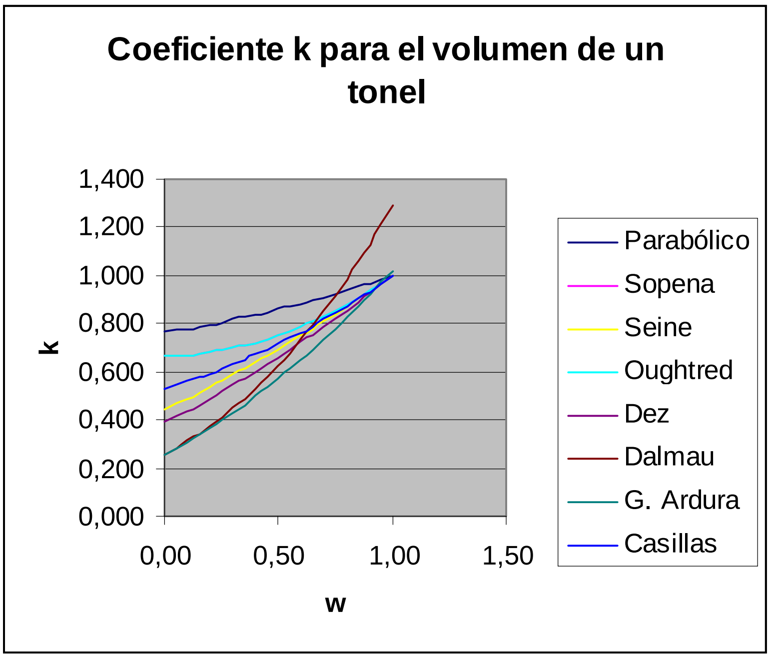
$$V = \pi R^2 h\left[1 - \frac{1-\omega}{n+1} + \frac{(1-\omega)^2}{2(2n+1)}\right]$$

Es fácil construir una tabla y gráfica de esta fórmula, que tiene el aspecto de la figura. El coeficiente del tonel aumenta con n, como era de esperar. De hecho, un valor n=1 correspondería a un tonel formado por dos troncos de cono unidos por sus bases menores, que no se dan en la práctica, mientras que valores altos de n serían toneles muy próximos a un cilindro. Probablemente, el valor que más se aproxime a los reales sea n = 2, correspondiente a una directriz en forma de parábola ordinaria. El coeficiente del tonel vale para este caso:

$$k = \frac{11 - 5\omega + \omega^2}{6}$$

Observemos, por cierto, que este valor no coincide con el de Casillas. Comparemos ahora este valor con los obtenidos tabulando también las fórmulas anteriores.

VOLUMEN DE UN TONEL DE DIRECTRIZ PARABÓLICA DE GRADO n (Valor del coeficiente k)								
•	**Parabólico n=2**	**Sopena**	**Seine**	**Oughtred**	**Dez**	**Dalmau (• = 1,5)**	**G. Ardura**	**Casillas**
0,00	0,767	0,667	0,444	0,667	0,391	0,259	0,255	0,532
0,05	0,774	0,668	0,467	0,668	0,414	0,285	0,281	0,546
0,10	0,781	0,670	0,490	0,670	0,439	0,313	0,309	0,561
0,15	0,789	0,674	0,514	0,674	0,464	0,343	0,337	0,576
0,20	0,797	0,680	0,538	0,680	0,490	0,376	0,367	0,593
0,25	0,806	0,688	0,563	0,688	0,517	0,411	0,398	0,611
0,30	0,816	0,697	0,588	0,697	0,544	0,448	0,431	0,630
0,35	0,826	0,708	0,614	0,708	0,572	0,489	0,465	0,650
0,40	0,836	0,720	0,640	0,720	0,601	0,531	0,500	0,670
0,45	0,847	0,734	0,667	0,734	0,630	0,577	0,536	0,692
0,50	0,858	0,750	0,694	0,750	0,660	0,626	0,574	0,715
0,55	0,870	0,768	0,723	0,768	0,691	0,677	0,613	0,739
0,60	0,883	0,787	0,751	0,787	0,723	0,732	0,653	0,763
0,65	0,896	0,808	0,780	0,808	0,755	0,790	0,694	0,789
0,70	0,909	0,830	0,810	0,830	0,788	0,851	0,737	0,816
0,75	0,923	0,854	0,840	0,854	0,821	0,915	0,781	0,844
0,80	0,937	0,880	0,871	0,880	0,856	0,983	0,826	0,872
0,85	0,952	0,908	0,903	0,908	0,891	1,055	0,873	0,902
0,90	0,968	0,937	0,934	0,937	0,926	1,130	0,921	0,933
0,95	0,984	0,968	0,967	0,968	0,963	1,210	0,970	0,965
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,293	1,020	0,998



TONELES EN USO.

Por otro lado, en el *Memorial Técnico* de L. Mazzocchi nos facilita también fórmulas para el cálculo del volumen de toneles en uso, de tal forma:

Condiciones del tonel	**Volumen de la parte**	
	Llena	Vacía
Casi lleno	-------	2,18 . l . h²
Casi vacío	2,18 . l . k²	-------
Más de la mitad	-------	1.77 . l . h²
Menos de la mitad	1.77 . l . k²	-------

Siendo: l = longitud del tonel
h = altura de la parte vacía
k = altura de la parte llena
h + k = D = diámetro interior máximo

TONELES ELÍPTICOS.

***Memorial Técnico* de L. Mazzocchi**

$$V = 0.262 \cdot l \cdot (2.A.B + a.b)$$

Siendo: A, B = ejes de la elipse máxima
a, b = ejes de las elipse de fondo

A Quesada & JM Albaigès, octubre 2000

YO, TÚ, ÉL

Aunque en los lenguajes primitivos sólo existe una segunda persona verbal, muy pronto la jerarquización social de cada comunidad se manifiesta en el lenguaje que ésta emplea, y concretamente en la forma de dirigirse a otras personas.

Empezando por la primera (verbalmente hablando), la forma **yo** conoce diversos matices. Algunos lingüistas dicen que a estructura del lenguaje revela nuestra visión del mundo. Desde ese punto de vista, es interesante notar que el inglés es la única lengua en que la palabra **I** se escribe siempre con mayúscula. En cambio, en siamés se demuestra educación usando la palabra “esclavo” en lugar de **yo** (eso no es tan curioso como pudiera parecer a primera vista: muchas personas en nuestros medios dicen sistemáticamente “un servidor” hablando de ellos mismos, y en todo caso se considera de mal gusto la repetición excesiva de la palabra **yo** hablando)

La segunda persona conoce distintas formas en los países árabes según sea hombre o mujer, quizás un reflejo del rol tan diferenciado de ambos sexos. En todo caso, en las lenguas romances el latín **tu** se ve pronto dignificado con la aparición de **vos**, inicialmente dirigido a una segunda persona del plural, con la que se alude al supuesto séquito del señor a quien se dirige el humilde vasallo. Este proceso llega a ser acompañado de la asunción por parte de la persona dignificado con el singular mayestático **nos**.

Algo más tarde aparece en castellano la forma **vuestra merced**, que al principio es lógicamente más respetuosa, pero su reserva para las personas de especial consideración acaba produciendo en el lenguaje corriente el curioso efecto de una mezcla entre el **tú** y el **vos** que acaba invirtiendo el grado de familiaridad de cada una. En el Siglo de Oro el trato de **vos** era mucho más familiar que el de **tú**, y por ello se reservaba par a los muy íntimos. Este efecto se da todavía hoy en algunos países hispanoamericanos, como Argentina, para desconcierto de los españoles, que identifican, inducidos erróneamente por el cine y la literatura indocumentados, a considerar el **vos** como un tratamiento intermedio entre el **tú** y el **usted**. El tratamiento **usted** se complica más todavía con grados superiores, como **vuestra señoría** o **su señoría**, pronto abreviados en **usía** a secas o en **señoría**, y **su excelencia** o **vuestra excelencia**, que pasan a **excelencia** o a **vuecencia**. Hoy son poco usados, salvo en medios militares o jurídicos.

Hay que advertir que, consecuentemente a la proximidad de lo aludido, por concordancia gramatical el tratamiento **vos** es conjugado con la segunda persona del plural, mientras que los restantes corresponden a la tercera del singular. El mismo proceso de uso repetido lleva en estos casos al abandono de la segunda forma del plural en algunos lugares como Andalucía, Canarias o Hispanoamérica, donde es frecuente que el **vosotros** sea reemplazado con **ustedes** (con la correspondiente conjugación verbal), aun para personas del círculo íntimo.

Los lenguajes próximos al español siguen soluciones similares, pero propias de cada caso. El francés utiliza como único tratamiento de cortesía **vous**, conjugado con la segunda persona del plural, que sería equivalente al **usted** español. El italiano utiliza **lei** (literalmente, ‘aquello’), enteramente análogo al **usted**, en concepto y conjugación. El alemán utiliza **Sie**, conjugado con la tercera persona del plural. Ojo con la mayúscula, que sirve para distinguirlo de **sie**, literalmente ‘ella’, conjugado, naturalmente, con la tercera del singular, o de **sie**, ‘ellos’, con la tercera del plural. En realidad, **Sie** es abreviatura de una locución perifrástica similar a ‘su merced’.

Unas palabras aparte merece el catalán, donde la fuerte influencia del castellano ha introducido el tratamiento **vostè**, calco del **usted**, con lo que el tradicional **vos** ha quedado reducido a ciertos casos especiales, como el que se da a los ancianos en los medios rurales o, en plural, a las multitudes.

Hemos dejado para el final el más curioso: el del inglés, donde se usa un solo tratamiento de cortesía, **you**, conjugado igualmente el singular y en plural. Con ello el grado de intimidad se consigue mediante otros procedimientos, como el uso continuo del nombre del interlocutor. En una conversación en inglés, los latiguillos "John" o "Mr. Smith", según corresponda, se repiten con una frecuencia que sería incluso molesta entre nosotros, pero que suple la falta de una conjugación adecuada para cada caso.

Sin embargo, existe un tratamiento arcaico, **thou**, con su propia conjugación verbal, (sufijo -*st*), que actualmente se reserva para Dios y el rey. Paradójicamente se considera hoy este tratamiento como el de máximo respeto, cuando inicialmente era lo contrario, pues equivalía a nuestro **tú**. El uso repetitivo del **you** (que inicialmente era 'vosotros', o sea **vos**), extrapolado a todo el mundo, ha acabado invirtiendo el grado de familiaridad de cada uno.

JMAiO, jul 00

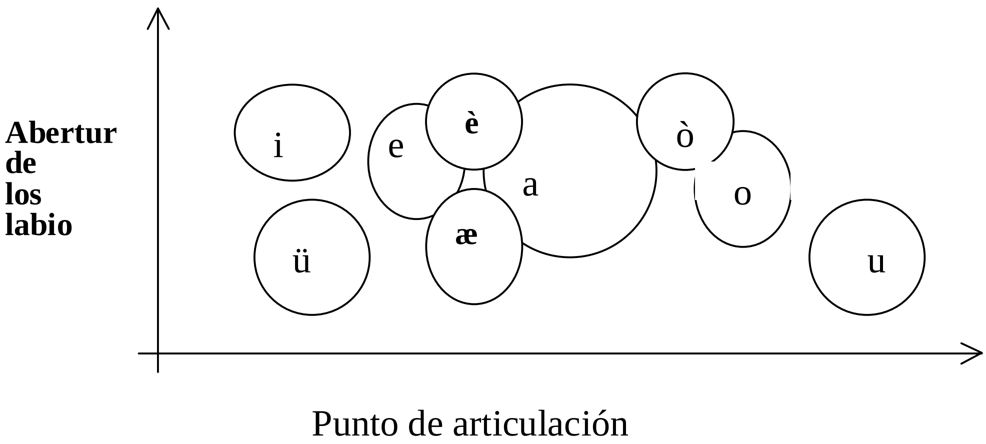
ARTICULACIÓN DE LAS VOCALES

Una de las muchas razones por las que no es posible un alfabeto fonético internacional, por el que ingenuamente suspiran algunos, es la dificultad de definición de lo qué es realmente una letra. Pues lo que un español entenderá por a, por ejemplo, no es lo mismo que entiende por ella un inglés o un sueco.

Precisemos un poco más. Todos sabemos que la a se articula en la zona central de la boca, pero, ¿qué sucede si decidimos articularla un poco más atrás? Para un hisapanohablante nada: los pasos de la *a* a la *o* y de ésta a la *u* son percibidos como súbitos, a lo sumo con alguna pequeña vacilación intermedia.

Pero no ocurrirá lo mismo con un catalanohablante: de la *a* pasará a la *ò* (separando más los labios al mismo tiempo), de ésta a la *o* y de ésta finalmente a la *u*.

Si esto nos sorprende, pensemos en el dígrafo *ll*, inexistente para la mayoría de las



lenguas. Un hablante de las lenguas peninsulares lo distinguirá perfectamente de la *l*, pero para un francés se tratará de un mero matiz en la pronunciación de ésta, al que él no dará importancia fonémica, suponiendo que llegue a captarlo. Para nosotros está muy clara la diferencia, que se reduce a una mayor zona de contacto entre la lengua y el paladar. Pero la diferencia existente entre las letras *d/dd* es la misma para un vasco (la *dd* es una *d* mojada), y mientras éste distinguirá perfectamente ambos sonidos, no ocurrirá lo mismo con un español.

Centrémonos en las vocales. Cada una de ellas viene definida como mínimo por estas características:

- Abertura de la boca
- Punto de articulación
- Nasalidad
- Posición de los labios

Dando a cada uno de estos parámetros un valor, podríamos definir cada vocal mediante un cuaternio, lo que equivaldría a situarla en un "universo" definido por cuatro coordenadas.

Para simplificar el razonamiento, limitémonos a dos coordenadas, que representaremos en los ejes (X,Y). Según podemos ver en la figura, la *i* cubre una zona con el punto de articulación en la parte delantera de la boca e importante abertura de labios. Si mantenemos el mismo punto de articulación y reducimos el parámetro labial, aparece la *ü* (u francesa), situada por tanto en la zona de idénticas abascisas que la U pero ordenadas menores.

Similarmente ocurre con la *a* y la *o*, articuladas en la zona central de la boca. Pero una articulación en un punto intermedio a ellas acompañada de una abertura de labios originará la *ò*, vocal distinta para un catalanohablante, pero no para un castellanohablante, ya que para éste se sitúa en una zona "vacía", que él tenderá a identificar con su *o*, o más raramente con su *u*.

Similarmente ocurre con la llamada "vocal neutra", que hemos representado por *æ*, tan frecuente en catalán. El hecho de estar situada entre la *a* y la *e* origina su frecuente confusión con una de estas vocales, especialmente en oídos castellanos (Panadés/Penedès). O en la *è*, más cercana a la *a*.

Josep M. Albaigès
Barcelona, dic 99