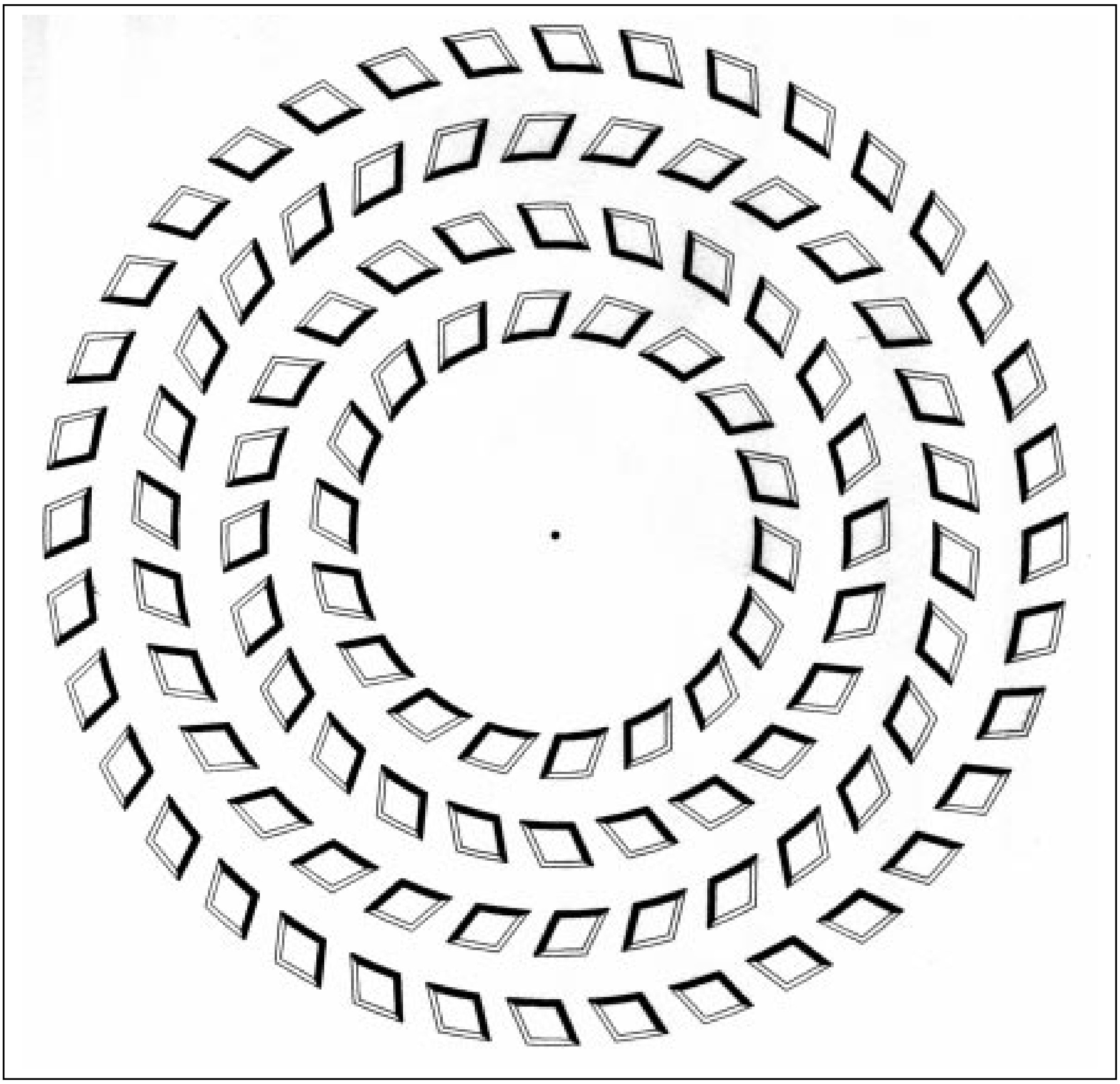


Carrollia

Núm. 69, junio 2001

CARROLLIA

Dirección en la web: **www.ciudadfutura.com/juegosmensa/carrollia.html**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès
e-mail: jalbaiges@caminos.recol.es

SUMARIO

NUMEROLOGÍA : 69

Es número compuesto: 69 = 3·23. Modernamente ha sido asociado con el sexo por sus afinidades kamasutrianas.

Año de la guerra civil en Roma, con cuatro emperadores.

Todos los nombres que recibe en loterías aluden a su cualidad “inversible”: la mudanza, arriba y abajo, patas p’arriba, patas p’abajo, el erótico. A veces es llamado también “el gancho del trapero”, como el 5 y el 7.

Es el único número cuyo cuadrado y cubo usan todos los dígitos una vez: $69^2 = 4761$; $69^3 = 328509$.

Curiosamente, el carácter sexual del nombre continúa en algunas palabras que lo tienen como número gemátrico: bigamia, nadería.

CUADRADO MAGICO DE 5 X 5 DE CONSTANTE 69

1	12	25	9	22
8	21	5	11	24
15	23	7	20	4
19	3	14	27	6
26	10	18	2	13

Cualquier fila columna o diagonal suma 69 A.Cebrián 0301

¿QUÉ MEJOR PLATA QUE LA ARGENTINA?

Son tradicionales las bellas combinaciones de sellos (o estampillas, como dicen en Hispanoamérica) con que Jorge Viaña adorna esta sección de correspondencia. En este caso, las bellas muestras gauchas no han dejado de causar cierta perplejidad a este lado del charco. Dice Jorge en la carta que acompaña la edición de ESQ:

Empleo los sellos de platería, espero que te gusten y en mi próxima te enviaré un volante del Correo Argentino con información ilustrativa de esos instrumentos. Mientras tanto, verás que el sobre blanco, con los sellos de plata en fondo celeste, reproducen la bandera de acá... esperemos que no lo interpreten como mal uso de la bandera (por las noticias que andan por el mundo, comprenderás a qué aludo).

Con un abrazo, reitero mi saludo a todos/as carrllianos. ¡Agur!

Maravillado quedo por esa bella artesanía argéntea, aunque me he visto obligado a consultar el diccionario para saber qué cosa era la “rastra” (“*Arg*. Pieza, generalmente de plata, con la que el gaucho sujetaba el tirador, formada por una chapa central labrada y monedas o botones unidos a ésta por medio de cadenas”; en cuanto a “tirador”, seguid vosotros). Así he aumentado mi cultura. Tampoco he acabado de entender como funciona el freno. En todo caso, gracias, y espero ese folleto explicativo.

Tampoco acabo de entender a qué aludes con lo del “mal uso de la bandera”; en todo caso, la catalana es usada por aquí con un exceso sólo igualado por la estadounidense. Las cuatro barras aparecen en los anuncios, en la pastelería, en la confección y hasta en el papel higiénico.

Gracias también por el ESQ, y por las notas en eusquera. Hace poco, a un político antediluviano español (Manuel Fraga, quizás lo conozcas) en un momento de desaprensión se le ocurrió calificarlo de “idioma de museo”. Para mí, es el monumento español más importante.

Y no me alargo más, que ando esos días muy ocupado. Acabo de regresar de un viaje a Turquía, y estoy todavía abriendo el equipaje. En la revista hallaréis una minicrónica de él, hecha en los huecos del despacho de esta correspondencia, que me estaba esperando en casa, más abundante que nunca.

Empiezo por la última carta recibida, porque es la que da tema a la portada. Dice Luis M. García Sánchez, de Madrid:

Este efecto óptico me lo enseñó un compañero de trabajo hace poco. La manera de observarlo es la siguiente, coloca la hoja enfrente de tus ojos mirando al punto central y mueve la hoja a delante y atrás. He intentado comprender por qué funciona aunque sin mucho éxito. Aunque esta claro que el contraste entre superficies aumenta el efecto óptico y la configuración de los rombos es fundamental. He probado como verás con varios tipos de rombo y con distintos fondos. He observado que no es necesario mirar al punto central, funciona igual si se mira a cualquier punto situado dentro del círculo central y deja de funcionar si se mira un punto exterior, no es necesaria visión estereoscópica; prueba a verlo cerrando un ojo. Empecé con dos anillos uno de treinta rombos interiores y treinta y seis exteriores, luego pasé a tres y cuatro anillos. También he probado a ver qué pasa si se usa un juego de aros simétrico a otro, entonces cambia el sentido de giro (lo verás con los dos de color naranja). En fin espero que te guste. Si sabes como funciona dímelo y si quieres que te dé el efecto en soporte informático te lo mandaré.

Ciertamente el efecto es novedoso, al menos para mí, y por ello lo he utilizado como portada para [C]. No veo cómo se general el movimiento rotatorio, sospecho que en ello tiene efecto la persistencia de imágenes en la retina, combinada con algún efecto estroboscópico inducido por la forma de los rombos. Se aceptarán gustosamente explicaciones de los carrollistas.

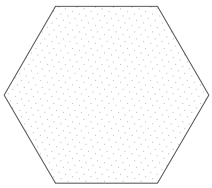
En [C-68] ya habíamos publicado unas contribuciones de Luis Manuel, pero otras quedaron en el tintero por falta de espacio. Otras (carta india) se han perdido, ruego su reenvío. He aquí lo que había en el tintero:

También te mando otro que se me ocurrió cuando vi uno de los de la colección de MENSA en Internet, concretamente el número 98 "Las tijeras mágicas", de autor anónimo, publicado en la colección de juegos de ingenio de Mensa Hong Kong. Éste se podría titular "con un solo corte", te mando el enunciado y la solución por separado.

Bueno Josep, espero que estos dos problemas te hayan gustado, en el segundo desprecio el espesor del papel, aunque se podría cambiar el enunciado diciendo que lo que se tiene es una porción de plano. Desde luego no se puede decir que se tiene una alfombra como en el de "Las tijeras mágicas", porque al realizar el plegado la deformación no permitiría un corte completamente recto.

CON UN SOLO CORTE II

Ahora tenemos una bonita porción de papel de forma hexagonal como se indica en la figura. Pues bien dando un solo corte recto a dicho hexágono y juntando los trozos reconstruir el rectángulo original cuyos lados guardan una proporción de raíz de tres partido por dos. ¿Cómo será dicho corte?. Os recuerdo la regla de Loederstedt, "mida dos veces, porque sólo se puede cortar una vez". Y como pista diré que las figuras resultantes del corte son congruentes



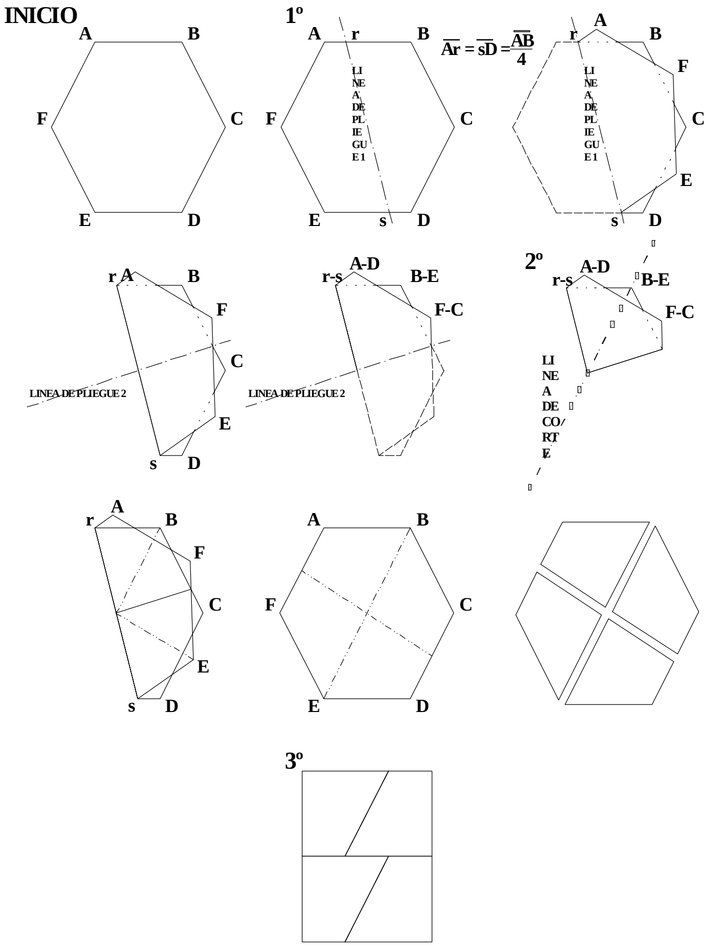
SOLUCIÓN

La manera de dar el corte es la siguiente:

1º.- Se dobla el papel por el eje de que une dos puntos situados en lados apuestos u a una distancia de un cuarto de lado, de vértices también opuestos. Así se obtiene una figura cuyo contorno tiene un eje de simetría, pues bien se realiza un segundo doblez por este eje.

2º.- El resultado de los pliegues anteriores es una figura irregular pero que también tiene un eje de simetría y este es precisamente por el que se da el corte.

3º.- Se pegan las figuras como se indica.



Dicen que es más interesante formular buenas preguntas que resolverlas. Un problema propuesto por José Antonio de Echagüe, de Madrid, ha generado abundante correspondencia entre ambos. Dijo José Antonio:

Te envío un muy cordial saludo a ti, y a través tuyo a todos los amigos de ©.

Hace tiempo que, "echando una mano" a uno de mis hijos en un clásico problema sobre líquidos y depósitos , me di cuenta de algo que en realidad es bastante obvio, pero que, al menos a mí me había pasado inadvertido hasta entonces: la respuesta del centro de gravedad de un recipiente lleno de un líquido a las variaciones continuas del mismo, es discontinuo y asimétrico.

Tenemos un recipiente regular, cilíndrico por ejemplo, de un material de peso despreciable. En el momento inicial está lleno de un líquido de densidad D. Por algún procedimiento el nivel de este líquido va descendiendo de forma continua, siendo sustituido por otro de densidad d (menor que D).

Es claro que en el momento inicial el centro de gravedad del conjunto G está a 1/2 de la altura del cilindro. Según avanza el proceso de sustitución G se desplaza hacia abajo, pero a una "velocidad" menor que la separación entre ambos flúidos, por lo que, en un momento G está precísamente, en esta superficie de separación. Este es el momento de discontinuidad. A partir de ahora G asciende, pero a "velocidad" distinta a la que descendió, hasta ocupar de nuevo el centro del conjunto, cuando todo el líquido inicial haya quedado sustituido.

Las notas de José Antonio sirvieron para elaborar el artículo que hallaréis en este número. Pero nuestro amigo lo complicó un poco más sugiriendo que se investigara el recorrido de un “centroide de gravedad”, definido como el punto por encima del cual queda tanta masa de líquido como por debajo. Los resultados son ciertamente muy curiosos, y se hallan en el artículo indicado.

Las cartas de Mariano Nieto, de Madrid, son siempre una delicia, tanto por la variedad de los temas tratados como por su rigor y amenidad. Dice en esta ocasión:

He dado con el teorema de Holditch que me ha encantado. Dice que dada una curva cerrada y convexa cualquiera, y AB una cuerda de longitud constante cuyos extremos se deslizan sobre la curva, y siendo P un punto de la cuerda que la divide en dos segmentos a y b, el punto P describirá una nueva curva cerrada en el interior de la otra. Entonces el área entre las dos curvas es πab ¿Lo conocías? Te lo envío con esta carta con su demostración.

Sobre el problema del garaje, **Ayuso** da una solución muy elegante suponiendo el aparcamiento lleno y "rebobinando" la acción, es decir deshaciendo lo hecho y estudiando la forma en que se deshace.

Leo en el **BOFCI** el divertido rótulo del sillero de **Olot**: *"Se hacen sillas y se repasa el culo a las viejas*". En **Calatayud** había un fabricante de calzado que anunciaba su comercio con este rótulo: "*Juan Arteaga Arteaga, trabaja en cueros*" y alguien, molesto, escribió debajo ¡Guarro!

Algo relacionados con lo anterior, transcribo unos anuncios comerciales tomados del periódico **Clarín** de Buenos Aires:

- *Jerseys para niños de lana.*
- *Camas para matrimonio de bronce.*
- *Sillas para niños plegables.*
- Por mi cuenta añado este: *Anillos para bodas de oro.*

¿Conoces el teorema del salario? Me lo envía un amigo por Internet.

El **Teorema del salario** establece que, a igual cantidad de trabajo, cuanto menos sepas obtendrás más beneficios.

Con su demostración se justifica matemáticamente el conocido hecho de que un fontanero gane más que un ingeniero.

- Postulado 1: "knowledge is power", es decir, knowledge = power
- Postulado 2: "time is money", es decir, time = money.
- Axioma: power = work / time (potencia = trabajo / tiempo)

Sustituyendo valores tenemos que:
knowledge = work / money, de donde money = work / knowledge, es decir

dinero = trabajo / conocimiento.

Así, a trabajo constante, cuando el conocimiento tiende a cero el dinero tiende a infinito.

Terminé la lectura del libro de **Simon Singh** *Los códigos secretos* que, como el anterior, *El enigma de Fermat*, me ha encantado. Ahora leo algo sobre **Champolion**. En febrero estuvimos una semana en Roma y en la librería **Feltrinelli** adquirí un bonito libro de **Conway** titulado *Il libro dei numeri*, editado por **Hoepli**.

El tema de "jerseys para niños de lana" es clásico y ha dado lugar a muchos divertidos rótulos. Me acude a la memoria uno especialmente gracioso: "Sombreros de tres pesetas para niños de lana". El autor, al ser advertido del desliz, corrigió diligentemente: "Sombreros de lana para niños de tres pesetas".

El teorema de Holditch (¿"picor sostenido"?) es un buen ejemplo de esas demostraciones carentes de rigor pero descubridoras de nuevas regiones matemáticas. Supongo que al ser aplicado al triángulo de Reuleaux no sale porque las áreas son negativas.

En cuanto a la polisemia de las palabras en tu fórmula, me recuerda :

Grave es lo contrario de **leve** (en medicina)
Grave es lo contrario de **agudo** (en música)
Sin embargo:
Leve es lo contrario de **agudo** (en cirugía)

Me apresuré a pedir a Francisco Ayuso Selgas ("Fray Sagles"), de Cartagena, su demostración del problema del garaje, y no puede expresarse ésta con mayor concisión y elegancia. A la vez plantea un interesante problema, que desafiará a los carrollistas. Dice Francisco:

En vez de ver cómo empiezan a entrar lo veo del siguiente modo: el último que entra lo hace sin duda por uno de los dos extremos (2 posibilidades), el penúltimo lo hace en uno de los otros dos extremos que quedan (otras 2 posibilidades, o sea 2^2 ya), el anterior entra por uno de los dos extremos que quedan (2^3) y así sucesivamente hasta el 2º que entra, ídem, y el primero ya es fijo. Por tanto, el resultado final es 2^{n-1}.

Te propongo otro problema: se toma la baraja española (40 cartas) ordenada: as oros, dos oros,...rey bastos; se toma la 1ª, se coloca la 2ª encima y la 3ª debajo, la 4ª encima y la 5ª debajo y así sucesivamente hasta la cuadragésima (rey de bastos), que quedará encima. En ese momento hemos dado la vuelta entera; la siguiente vuelta será igual arriba, debajo, etc.

¿Cuántas vueltas enteras serán necesarias para que queden de nuevo en el orden original?

Puedo indicarte que son 27 vueltas enteras, pero mi pregunta es: ¿Cómo se demuestra? Y generalizar para un número N de cartas, o si no se puede dar una solución en función de N dar al menos un método para hallarla.

Como he dicho antes, tu solución me parece inmejorable, y marca un atajo que confiere al problema esa elegancia y sencillez que debe ser la meta de todo matemático. Por cierto que estos atajos son habituales en problemas del tipo de suma de sumatorios que acaban en una potencia de 2, aunque en este caso no supe verlo.

Pero además Francisco mandaba una demostración para el punto de Fermat, que es el interior a un triángulo cuya suma de distancia a los vértices es mínima (en otras ocasiones nos hemos ocupado de él en [C]). He transcrito de la mejor manera posible su solución en el artículo adjunto.

Marc Moliné, de Terrassa (Barcelona), escribía en la lista de correo de Mensa:

Comentando con unos amigos un artículo de Màrius Serra aparecido en La Vanguardia el 8 de marzo sobre la xenofobia y el origen de las palabras, uno de mis amigos me explicó esta curiosa historia de xenofobia lingüística, que reproduzco íntegra, con imprecisiones geográficas incluidas.

Yugoslavia se desmembra y se reparte el territorio en varios países independientes: Servia, Monteverde, Croacia, Yugoslavia, Macedonia de frutas (o FYROM), Eslovenia, Lituania, Estonia, Letonia, Antonia, Sildavia y Borduriua. A partir de aquí todos estos países empiezan a darle mucha importancia a sus costumbres regionales y las elevan al grado de nacionales. Todo lo foráneo es expulsado y se intenta guardar la identidad local. El idioma no se escapa de esta estúpida acción. Ya les paso a los franceses que al "Walkman" llaman "Baladeur"... o peor a los suecos que lo llaman "Free Style" que sigue siendo una palabra inglesa!!!

En Croacia se dan cuenta de que tienen un nombre francés para designar la palabra "corbata" —del francés "cravate"—. Se inventan un nombre en su idioma para designar a tan incómoda e inútil prenda... no sé qué nombre pero debe de ser algo así como "XZ6!asPTTro%ski"

Lo gracioso del asunto es que la palabra francesa "cravate" viene del croata y significa "CROACIA". O sea que sacaron de su vocabulario la palabra que no podia ser mas croata de todo el mundo.

Nuestro buen amigo Albert Muntané se halla actualmente en Sarajevo (Bosnia-Herzegovina), y resulta por ello el más indicado para precisar el mensaje anterior:

Buenas... saludos a Marc y al resto de colisteros... efectivamente, Marc, este texto contiene varios errores (calificarlos de imprecisiones me parece demasiado).

Cuando a principios de los 90 la Republica Federal Socialista de Yugoslavia, lo hace en los siguientes países:

- Eslovenia
- Croacia
- Bosnia-Hercegovina
- Macedonia (los griegos le pusieron lo de FYROM o Former Yugoslavian Republic of Macedonia)
- Federacion Yugoslava (que incluye a Serbia y Montenegro)

Hasta aquí la geografia. Por lo que se refiere a la lingüística, ciertamente en esos países se produce un proceso de diferenciacion, pero cuidado:

- En Eslovenia se habla el esloveno.
- En Macedonia el macedonio.
- En Croacia, Bosnia-Hercegovina, y Yugoslavia o Serbia y Montenegro, se habla el serbocroata.

Es en estos últimos 3 países donde se produce la diferenciación.

Para empezar, le cambian el nombre. Ya no se llamará "serbocroata" sino "serbio", "croata", o "bosnio" en función de quién lo mencione.

Así, los serbios dejan de hablar el "srpskohrvatski" para pasar a hablar el "srpski". Los bosnios pasaran a hablar el "bosanski" o "bosnjacki". Y los croatas pasaran a hablar el "hrvatski". Y aquí viene lo de la corbata. En su idioma, Croacia se llama "Hrvatska". El idioma, "Hrvatski". Y sus habitantes, "Hrvati".

O sea que de inventar el nombre del país nada de nada.

No están mal todas estas precisiones, que nos arrojan algo más de luz sobre lo que está ocurriendo en estos desgraciados países. Ojalá puedan dedicarse pronto a quehaceres más urgentes.

Antonio Cebrián, de Sagunto (Valencia), es un constante colaborador, capaz de hallar en las relaciones más insospechadas en el entramado numèrico. Como ejemplo manda un gran grupo de ellas con la carta:

Este trimestre he querido cambiar un poco el estilo de mis colaboraciones numerológicas trimestrales, con el fin de que los Carrollistas ejerciten sus neuronas.

En las páginas correspondientes podéis verlas publicadas.

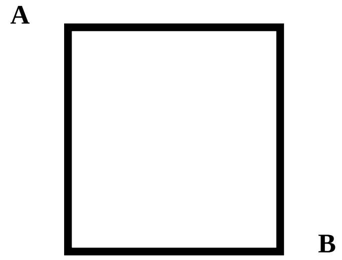
Y en esa tarea os dejo, queridos carrollistas. ¡Feliz verano!

Josep M Albaigès

BUSCÁNDOSE EN LA PIRÁMIDE

Me sucedió en 1996 en la cima de la pirámide de Kukulkán, en Chichén Itzá (México). Mi hermano y yo estábamos uno en cada esquina del edificio cuadrado que la corona buscándonos sin encontrarnos. Y entonces se me ocurrió la generalización de este problema.

Dos personas se hallan en esquinas opuestas de un edificio, A y B. Ambas tienen interés por encontrarse, y por ello se pondrán en camino hacia una de las esquinas contiguas, pero, ¿y si eligen mal? Es fácil ver que si ambos se mueven hacia el mismo lado no se encuentran, y sí lo hacen moviéndose hacia lados opuestos. Por tanto, si cada jugador elige arbitrariamente su movimiento, la probabilidad de encuentro será ½: por término medio el encuentro les llevará 2 desplazamientos, pero pueden ser más.



Una posible alternativa sería quedarse quieto esperando que sea el otro quien venga a nuestro encuentro, pero, ¿y si ambos aplican la misma táctica?

Para simplificar el problema, considerémoslo como un juego dividido en “tiempos” En cada tiempo, los dos “jugadores” mueven simultáneamente, y su “jugada” puede ser una de estas tres:

- Moverse hacia la derecha (D).
- Moverse hacia la izquierda (I)
- Permanecer quieto (O)

Consideraremos que dos jugadores se encuentran si sus movimientos les llevan a la misma esquina o a dos esquinas contiguas, pues entonces se avistan mutuamente. ¿Cuál será la mejor estrategia para maximizar las probabilidades de encontrarse?

*****

El problema entra en los resolubles mediante la Teoría de Juegos. Escribamos en una matriz todas las posibles jugadas de ambos jugadores, representando el resultado de la jugada como un 1 si los jugadores se encuentran, y como 0 en caso contrario

		Segundo jugador		
		D	**I**	**0**
Pri-	**D**	**0**	**1**	**1**
mer	**I**	**1**	**0**	**1**
jugador	**O**	**1**	**1**	**0**

La teoría de juegos lleva a diseñar la mejor estrategia: jugar D, I o O, según sorteo, con probabilidades 1/3 cada una. En estas condiciones la probabilidad de encontrarse es 2/3, con lo que se mejora el “tiempo medio de encuentro” a 1,5 jugadas.

¿Qué ocurrirá para edificios pentagonales, hexagonales, etc.? La cosa se complica, pues cada movimiento conduce a una nueva situación, en la que la probabilidad de encontrarse depende de la situación inicial: si los jugadores no se avistan se encuentran a una distancia de 2 lados por el camino más corto.

Josep M. Albaigès, marzo 2000

DICCIONARIO INCORRECTO

Publicamos hoy una curiosa muestra del "Diccionario incorrecto" de Carlos Rodríguez Braun, colaborador del periódico *Expansión*. Puede hallarse la obra entera en **www.expansiondirecto.com/opinion/firmas/braun.**

BANCO CENTRAL. Entidad pública y monopólica que sustituyó durante el siglo XX al patrón oro, y mediante la cual los ciudadanos ya no pudieron elegir la moneda que preferían, porque los Estados les impusieron el curso forzoso. Los bancos centrales fueron creados para estabilizar los precios y la actividad económica; gozan de una excelente prensa sin haberlo conseguido.

CAPITALISMO. Régimen malévolo que ha de ser juzgado exclusivamente por sus peores resultados.

CONTRABANDO. Comercio o producción de géneros que podría ser perfectamente normal, y que sólo la arbitrariedad de los políticos vuelve ilegal.

GLOBALIZACIÓN. Mayor ámbito de libertad desplegado a partir de finales del siglo XX, tras el desplome del comunismo. Las fuerzas reaccionarias se le oponen.

GRANDES ALMACENES. Símbolo de la brutalidad capitalista y enajenación del hombre moderno, se trata de lugares cómodos, con facilidades de acceso y aparcamiento, y que ofrecen una multitud de bienes y servicios en competencia que los consumidores demandan libremente. No es obligatorio entrar en ellos, ni comprar. La atención es esmerada y los horarios amplios. Para colmo, si el ciudadano no queda satisfecho, le devuelven el dinero. Vamos, como cualquier departamento de las administraciones públicas.

NEOLIBERALISMO. Liberalismo contemporáneo de definición imprecisa. Lo único importante es que el prefijo "neo" debe ser pronunciado con una mueca de asco.

ORGANIZACIONES NO GUBERNAMENTALES. Dícese de organizaciones que dependen de los gobiernos.

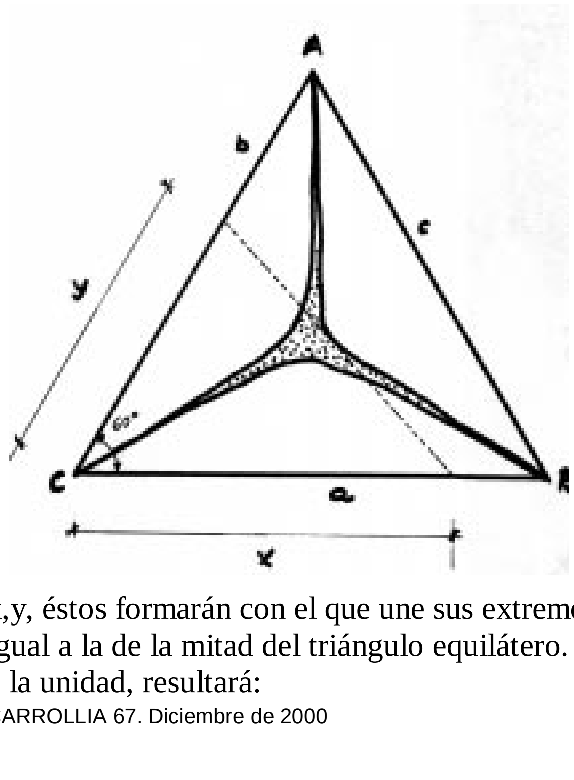
SOCIALISMO. Régimen benévolo que ha de ser juzgado exclusivamente por sus mejores intenciones.

SOLIDARIDAD. Coacción sobre el dinero ajeno.

EL NÚCLEO MEDIANERO DE UNA FIGURA

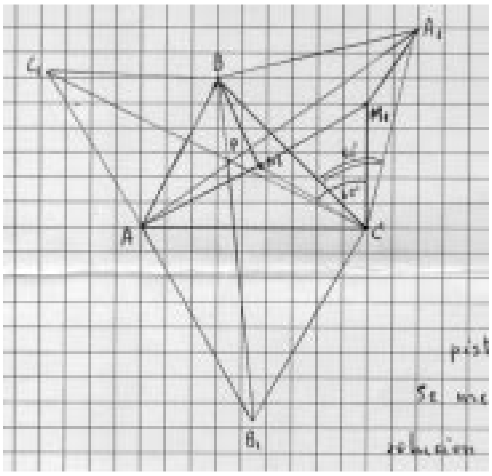
José Antonio de Echagüe, fecundo proponedor de problemas, dice en una de sus cartas:

Supongamos una figura plana no necesariamente simétrica. Es obvio que tiene un punto cdg. También parece claro que existirá una recta que dividirá a la figura en dos áreas iguales. ¿Sólo una? Creo que existirán muchas. Quizás infinitas. ¿Qué hay sobre el o los puntos de corte de tales rectas?



En efecto, y el problema es un tanto enojoso, aunque no excesivamente complejo. En algunas figuras, por ejemplo el cuadrado, cualquier recta que pasa por su centro lo divide en dos partes iguales, o sea también de la misma área. Pero esto no ocurrirá siempre, incluso con figuras regulares.

Vamos a estudiar quizá la más sencilla posible, el triángulo equilátero. Recordemos que la fórmula del área de un triángulo de lados a, b, que comprenden un ángulo C, es S = ½ab sin C. Si a partir del vértice C situamos sobre los lados a y b los segmentos x,y, éstos formarán con el que une sus extremos otro triángulo cuya área, si es medianero, será igual a la de la mitad del triángulo equilátero. Si para simplificar hacemos el lado de éste igual a la unidad, resultará:



$... = \frac{1}{2}\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

$xy = \frac{1}{2}$

...rectas posibles así formadas es una hipérbola cuyo eje mayor se ...ancia del del triángulo igual a $\sqrt{6}/4 = 0{,}612$ (la distancia ...s correspondientes a los lados, tangentes entre sí y a las alturas ... podremos llamar "núcleo medianero" por estar formado por la ...este núcleo en general puede ser bastante compleja, ...también tendrá discontinuidades, pero, en el caso de polígonos, ...tera.

JMAiO, Barcelona, abril 2001

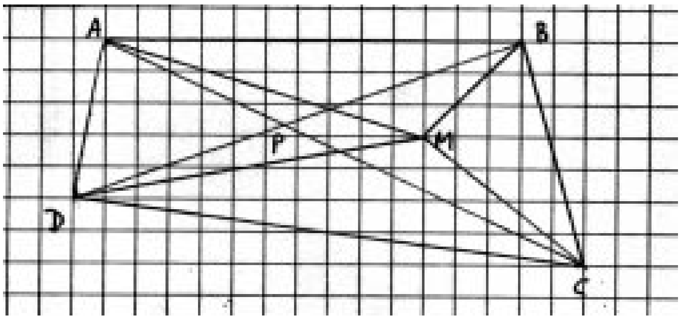
EL PUNTO DE FERMAT

Ésta es mi solución al punto de Fermat. En un triángulo, si es M el punto solución, debe ser AM+BM+CM mínimo, Voy a demostrarlo de modo totalmente geométrico.

Éste es mi razonamiento: intentaré poner los tres citados segmentos uno en prolongación del otro de modo que MM_1 = MC, y M_1A_1 = MB. Para ello se me ocurrió (feliz idea) construir el triá... MBC, con lo que los sitúo de forma ac... equilátero BCA_1, luego A_1 es un punto... a.

Por eso, y por ... s equiláteros ABC_1 y ACB_1, y el ... ie por estar alineado AM y MM... AMC = 120º y lo mismo BMC = B...

$AA_1 = BB_1 =$ ...



En cuanto al punto de Steiner (análogo en un cuadrilátero) razono así:

Cualquier punto M que no esté en la diagonal AC cumple MA +MC > AC
Cualquier punto M que no esté en la diagonal BD cumple MB +MD > BD
Sumando miembro a miembro estas desigualdades se obtiene que cualquier punto M que no esté en las dos diagonales cumplirá:

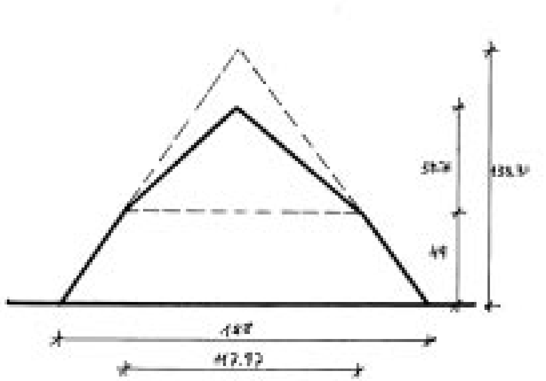
MA + MC +MB + MD > AC + BD = PA + PC + PB + PD, luego:

El punto P, cruce de las dos diagonales, es el pedido.

Francisco Ayuso

LA PIRÁMIDE ACODADA DE SNOFRU

Cerca de El Cairo se encuentra esta extraña pirámide, la segunda que en su vida construyó el faraón Snofru, de la IV dinastía (hacia 2615 aJC), anterior a Keops. En la figura se detallan las principales dimensiones de su sección vertical por el centro de sus caras.



Sigue siendo motivo de especulación del porqué de esta extraña forma. Unas primeras cábalas apuntan a la escasez de material una vez iniciada, otras, más verosímiles, a que el suelo, menos rocoso de lo que creían los constructores, fue cediendo más de lo previsto, deformando y poniendo en peligro las galerías interiores. Como fuere, se tomó a partir de los 49 m de altura la decisión de reducir la pendiente inicial de la pirámide (53,45º) a una inferior de 43,22º, con lo que la altura total, prevista inicialmenrte en 133,31 m, se redujo a unos 105 m.

Pero, ¿valió la pena esta reducción? Unos sencillos cálculos establecen las restantes dimensiones:

$z_1 = 49{,}00$ m
$z_2 = 55{,}71$ m
$a_1 = 188$ m
$a_2 = 117{,}97$ m

Con lo que el volumen actual de la pirámide es:

$$V = 49\cdot[188^2 + 188\cdot 117{,}97 + 117{,}97^2]/3 + 117{,}97^2\cdot 55{,}71/3 = 1.425.279 \text{ m}^3$$

Mientras que el volumen previsto hubiera sido:

$$\mathbf{V' = 188^2\cdot 133{,}31/3 = 1.570.570\ m^3}$$

Es decir, que el ahorro conseguido es sólo de un 9,25 %. Poco iban a reducirse los asentamientos y poco material se ahorró.

En realidad los ingenieros de Snofru tenían ya una triste experiencia en la construcción de pirámides. La primera había sido abandonada, y esta segunda quedó como una chapuza para los siglos de los siglos. Pero el faraón era tenaz, y en la tercera, la llamada “Pirámide Roja”, de unas dimensiones sólo ligeramente inferiores a las de Keops, consiguió inmortalizarse. En ésta, la armoniosa proporción de sus dimensiones exteriores y la perfección del sistema de cámaras funerarias la convierten en una de las obras más logradas del Imperio Antiguo. Allí fue enterrado finalmente el monarca.

JMAiO, abr 01

LAS TEMIBLES VOCES "ING"

Juan José Alzugaray es presidente del Comité de Terminología del IIE. Con su amable permiso, reproducimos este artículo.

Al abrir las páginas de cualquier periódico o revista, nos encontramos de bruces, en titulares o letra menuda, una ristra de palabras inglesas terminadas en "ing". Son los gerundios anglosajones, voces aristócratas y linajudas, que campan por sus respetos a lo largo y ancho de nuestro idioma.

Ingleses y americanos, con su pragmatismo y sentido práctico, las convirtieron en un santiamén de gerundios de un verbo de acción en sustantivos importantes, de los que dan que hablar y escribir, en varios idiomas del mundo, a algunos cientos de millones de sus habitantes.

Están muy arraigados también en nuestro idioma y costará lo suyo su erradicación. Es muy difícil establecer su número. En nuestras recientes investigaciones, hemos censado centenar y medio de gerundios anglosajones presentes en el año 2000, entre los cuales un medio centenar hace muchísima pupa.

Citemos los más utilizados y peligrosos: "marketing", "holding", "camping", "catering", "consulting", "dumping", "leasing", "parking", "planning", "pressing", "ranking", "training" y "zapping".

En la tecnología, las voces "fading", "handling", chating", "banking", "blooming", "building", "engineering", "cracking", "dispatching", "sintering", "screening", "slabbing", entre otras. Ultimamente predominan las procedentes de Informática y Telecomunicación.

En economía y comercio, "accounting", "factoring", "fixing", "clearing", "merchandising", "overbooking", y "shopping", que tanto encanta a las mujeres. En el deporte, el acabose: "doping", "dribbling", "driving", "footing", "jogging", "jumping", "rating", "sparring", "surfing","trekking", "yearling", y las que se quiera. Dos clubes famosos de fútbol llevan en su nombre de pila la mancha infamante de un gerundio anglosajón: Racing de Santander y Sporting de Gijón. Que aprendan del Betis Balompié.

Además, andan por ahí sueltas "casting", "dancing", "feeling"·, "happening", "travelling", "living", "timing", "checking", "cleaning", "pudding", "lifting", "smoking", "standing", ¿Hay quien dé más?

Tras la fatigosa enumeración, el pequeño análisis ritual. Una vez más, la desconsoladora realidad. Los pobrecitos hispanos, los ingenieros los primeros, dale que te dale a los "ing" cual si fueran zambombas navideñas, haciendo el juego de manera tontorrona a la innegable superioridad técnica anglosajona. Y ocurre así, porque nos da la realísima gana. La verdad es que no espabilamos. Debiéramos echarle una pizca de genio en estos casos. Da coraje saber que casi todos estos gerundios ingleses tienen su voz sustantiva en español, correcta y adecuada. Y cuando no existe aún, hay que echarle salero y prisa para que se cree y florezca.

Sería difícil encontrar una revista técnica actual en la que no aparezca alguna de estas perlas. Ilustres ingenieros las usan de contínuo en su lenguaje oral y escrito, en sus informes, sin avergonzarse un ápice de ello, con la mayor tranquilidad del mundo. Sus colaboradores habituales les siguen gustosamente los pasos. Unos y otros lo hacen por pedantería, suficiencia, falta de sensibilidad, mimetismo.

La tecnología avanza deprisa, el idioma inglés camina por ella como Pedro por su casa, y dada nuestra dependencia tecnológica, los extranjerismos técnicos ingleses, y en especial las malvadas voces "ing", se nos cuelan por donde quieren y se aposentan ricamente en nuestro idioma. Nuestras defensas son lentas, a pesar de algunas actuaciones estimables.

Dentro de la actividad de los ingenieros en empresas, donde hay más labor por realizar en este campo es en las compañías multinacionales, en los departamentos comerciales de las empresas normales, y en los sectores de tecnología de vanguardia.

Resultan en cambio de una gran eficacia y ejemplaridad los diccionarios elaborados por entidades o expertos de los sectores más afectados, pertenecientes a la Informática, Telecomunicación, Energía, Siderurgia, Electrónica y otros.

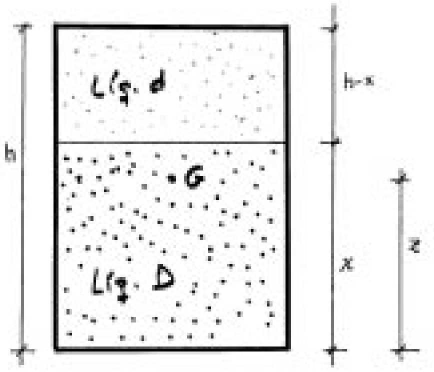
Finalmente, quede constancia una vez más de nuestro llamamiento y ruego a quienes contribuyen consciente e involuntariamente a este sutil colonialismo inglés de las temibles voces "ing" en el lenguaje tecnológico hispano. Hagamos un serio esfuerzo por evitarlo.

JJ Alzugaray

SUPERPOSICIÓN DE LÍQUIDOS EN UN RECIPIENTE

1. Planteamiento inicial

Unos comentarios de mi buen amigo José Antonio de Echagüe me han inducido a estudiar el problema que él propone.



Supongamos un recipiente cilíndrico de densidad despreciable y altura *h* lleno de un líquido de densidad *D*. El cdg del líquido está obviamente a la altura *h/2*. ¿Qué le ocurrirá a éste si se sustituye paulatinamente el líquido por otro de densidad menor, *d*?

El problema conduce a unas ecuaciones ciertamente incómodas. El líquido contenido en la porción del recipiente de mayor densidad tiene una masa *Dx*, y su cdg se halla a una altura *x/2*. Por tanto, su momento respecto a la base vale $M_1 = Dx^2/2$.

Podemos razonar análogamente con la porción de densidad d. El peso es ahora *d(h-x)*, la altura de su cdg es $x + (h-x)/2$, y por tanto el momento es $M_2 = d(h-x)(h+x)/2 = d(h^2 - x^2)/2$.

Si llamamos *z* a la altura del cdg total, igualando la suma de estos momentos con el momento de la masa total se tiene fácilmente:

$$D\frac{x^2}{2} + d\frac{h^2 - x^2}{2} = [dx + d(h-x)]z$$

De donde resulta:

$$z = \frac{1}{2}\frac{Dx^2 + d(h^2 - x^2)}{Dx + d(h-x)}$$

La derivada de esta función, igualada a cero, nos dará el valor de *x* para el que el cdg se halla a la mínima altura.

En vista de la complicación resultante, convendrá introducir algunas simplificaciones. Así, hablaremos de alturas relativas, $\xi = x/h$, $\zeta = z/h$, y también densidades relativas, $\delta = d/D$. Con estos cambios, queda:

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{\delta + (1-\delta)\xi^2}{\delta + (1-\delta)\xi}$$

Ahorramos al lector el proceso de cálculo de la derivación, igualación a cero y despeje de ξ, cuyo valor resulta ser:

$$\xi_g = \frac{\sqrt{\delta}}{1+\sqrt{\delta}}$$

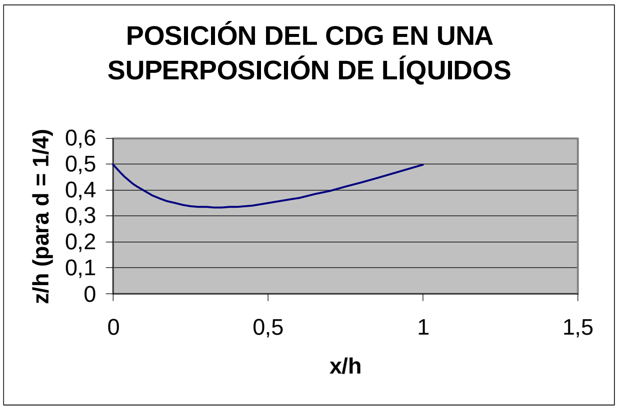
Sorprendentemente, este valor, al ser sustituido en la expresión (1), se reproduce:

$$\zeta_g = \frac{\sqrt{\delta}}{1+\sqrt{\delta}}$$

El significado físico de este resultado es que, en el momento en que el cdg del conjunto, aun estando a la mínima altura, se mantiene siempre por encima del punto de separación de los líquidos, como veremos más adelante. A partir de ese momento, vuelve a ascender.

La gráfica es de tipo parabólico, pero asimétrica, con el mínimo en el punto indicado.

Como ilustración, veamos dicha gráfica para un valor $\delta = 1/4$. En este caso, es $\xi_o = \zeta_o = 1/3$.



2. Variante de J. A. de Echagüe

José Antonio propone una interesante variante al problema. Llamemos “mediana másica” a la sección horizontal del cilindro que tiene la misma masa de líquido por encima que por debajo. Su altura no coincidirá en general con la del cdg. ¿Cómo evolucionará ésta con el llenado del recipiente?

El planteamiento es ahora distinto. Utilizando la misma figura anterior, y suponiendo que dicho punto, al que llamaremos G’, se halla en el seno del líquido más denso, la ecuación será ahora:

$$Dz = d(h-x) + D(x-z)$$

Ahorrando drásticamente los pasos intermedios, escribiremos directamente la ecuación final:

$$\eta = \frac{\delta + (1-\delta)\xi}{2}$$

Observemos que en este caso la posición de η varía linealmente con ξ.

Pero esta ecuación solamente vale cuando G’ se halla dentro del líquido de mayor densidad. Si el lector construye una figura análoga para el caso contrario, fácilmente verá que llegamos a:

$$Dx + d(z-x) = d(h-z)$$

Que conduce a:

$$\eta = \frac{1-(1/\delta - 1)\xi}{2}$$

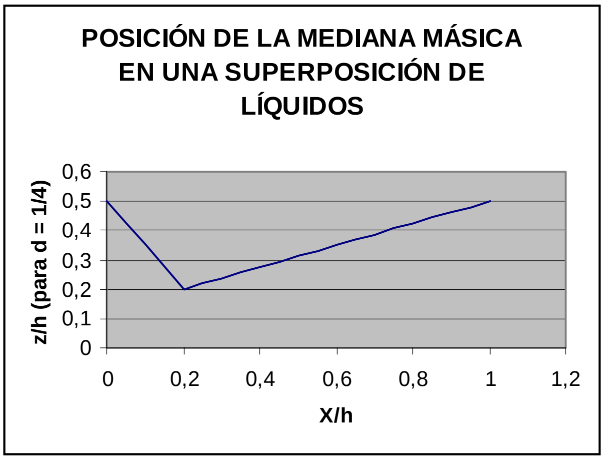
El paso del campo de aplicabilidad de una a otra fórmula se produce cuando se igualan los valores de η dados por ambas, es decir, para:

$$\frac{\delta + (1-\delta)\xi}{2} = \frac{1-(1/\delta - 1)\xi}{2}$$

Es decir, simplificando, para

$$\xi = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Fórmula de curioso parecido con la obtenida anteriormente. Incluso la gráfica de la evolución de η guarda ciertas similaridades, como se ve en la que se adjunta, tomada igualmente para el valor δ = ¼.



Observemos que en este caso el "punto de inversión" de una a otra rama recta se da para ξ = 1/5, valor inferior al obtenido en el primer caso. Como era de esperar, este punto coincide con la separación entre ambos líquidos.

La superposición de ambas gráficas revelaría que los dos ramales rectos de la segunda son precisamente tangentes a la primera en los puntos (0,½) y (1,½).

JMAiO, abril 2001

TERENTIUS SABINIANUS

Terentius Sabinianus fons et camena litteris,
sapiendo opimus et dicendo splendidus:
hoc praeter ceteros etiam Hippo dictitat
diarrytos, ubi magister praestans floruit,
uixitque numerum in se de analogia
Pythagorae primarium.

F. Bücheler-E. Lommatzsch, *Carmina Latina Epigraphica*, Anthologia Latina 11, 107. Poema en senarios yámbicos procedente de Thugga, ciudad de la Zeugitania, región de África donde se encontraba Cartago. (La ciudad de Hipona, que se cita en el epitafio, fue la sede episcopal de S. Agustín.)

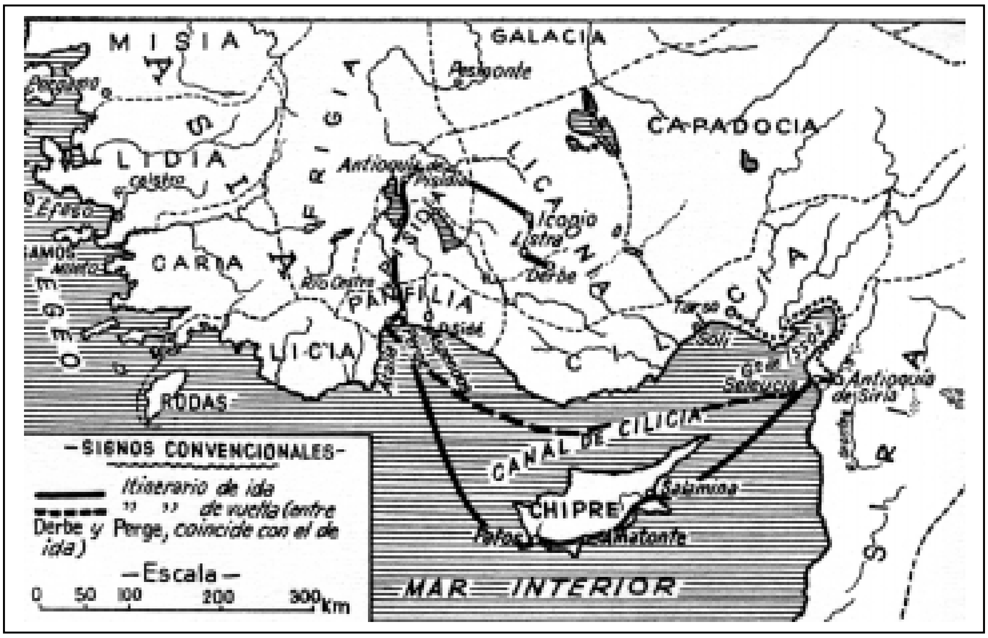
(Terencio Sabiniano, cuna y musa de las bellas artes, fecundo en el saber y brillante en el hablar: esto anda repitiendo, junto con todos los demás, la ciudad de Hipona, donde destacó el sobresaliente maestro. Vivió el cuadrado del número base de la proporción armónica de Pitágoras.)

Es decir, que vivió 36 años, si se acepta la interpretación matemática de E. Courtney, en *Musa Lapidaria*. A *Selection of Latin Verse Inscriptions* (Atlanta 1995), como hace Concepción Fernández Martínez en su ensayo “Evolución y desarrollo literario de los epitafios en verso”, recogido en *La literatura latina: un* corpus *abierto* (Universidad de Sevilla, 1999), de donde tomamos el texto, la traducción y el material para esta nota (en la que subsanamos una errata perturbadora).

En efecto, Courtney hace notar que el tercero de los tipos de proporciones que determinan la consonancia de la escala musical y cuyas propiedades fueron formuladas por Pitágoras, fue la llamada "proporción armónica", a saber: tres términos están en proporción armónica cuando la distancia de los dos extremos al medio es la misma fracción de su propia cantidad. Si consideramos 6:8:12, el 8 excede a 6 en 1/3 de 6 y es excedido por 12 en 1/3 de 12. 6 es el número básico de la proporción, de forma que el cuadrado de 6 es 36, edad del difunto.

De todos modos, indiquemos que la interpretación aritmética de Courtney es impecable, pero otros muchos números podrían ser considerados “básicos” en proporciones armónicas como 2:3:6, 3:4:6 e infinitas más.

JMAiO



TRAS LAS HUELLAS DE SAN PABLO

Éste fue el viaje que tres esforzados aventureros realizaron el pasado mes de mayo en Turquía. Abel de Ruste y Margarita Carrera, habituales en las tertulias *Carpe diem*, que con tanto éxito se celebran en Barcelona, y este servidor vuestro, decidieron llevar a cabo finalmente un proyecto largamente madurado: visitar los lugares que recorrió el Apóstol de los Gentiles en el primero de sus trascendentes viajes, narrado en Ac 13,1 a 14,28.

Desde luego no se trataba de un mero viaje de turismo, ni siquiera de una empresa religiosa, sino de un ejercicio de investigación de nuestras raíces históricas. En ese viaje paulino, el primero que realizara el apóstol, había sido tomada una de las decisiones más influuentes para la historia de la humanidad: convertir el cristianismo, a la sazón una de tantas sectas judías, en una religión de alcance terráqueo. Las consecuencias de este enfoque siguen caracterizando nuestra cultura occidental, y nos complacía ir a respirar el mismo aire que Pablo respiró, ver los mismos paisajes y quizás incluso captar algo de la inspiración de los protagonistas, si algún átomo de ella flotaba todavía en el aire.

No es difícil seguir los pasos que el apóstol realizó, con su fiel san Bernabé, hacia el año 47-48, por el interior de lo que entonces era un terreno apenas explorado, cargado de supersticiones y religiones en estado primitivo. El cristianismo se estaba afianzando en Palestina, pero ya Pablo de Tarso concebía la idea de extenderlo. Y los primeros escenarios en que pensó eran el revuelto mundo helenista, en el que se habían afincado ya los judíos, pues la vocación viajera de este pueblo era muy anterior a la destrucción del templo de Jerusalén. Pero la base de la población vivía entre primitivas aceptaciones de los dioses griegos y supercherías groseras que conjugaban pràcticas médicas con la simple prestidigitación.

En este ambiente se sumergieron Pablo y Bernabé tras una corta estancia en Chipre que no comentaremos. Desembarcados en el continente, probablemente en Atalia (actual Antalya), tras una corta estancia en Perge se dirigieron resueltamente hacia el interior.

Perge tiene hoy un aspecto muy distinto de cuando estuvo allí Pablo. Entonces era un mero pueblo, pero un par de siglos más tarde se convertiría en una metrópoli, radiante reflejo de la cultura romana. Sus restos imponen todavía al visitante del siglo XXI, exigente tras muchos viajes y acostumbrado a la exposición de ruinas y más ruinas. Pero Perge es algo especial; sus dos torres mochas, que vieron el paso de tantas invasiones, constituyen todavía un símbolo del Imperio de Roma frente al aluvión invasorio que sobrevendría después. En sus restos, enormes, abundan los "mármoles y arcos destrozados", que diría Rodrigo Caro. Una columna por aquí, a punto de caerse bajo mi empuje, un foro por allá, una fuente por acullá, nos hablan de un pasado estremecedoramente grande.

Pero Pablo se detuvo poco en este lugar marino, acaso porque buscaba zonas menos refractarias a nuevas fes. El curso del Cestro (Aksu, 'agua blanca' para los turcos) es providencial para franquear la imponente barrera de los montes Tauro. Las excelentes carreteras turcas son recorridas por el veloz coche ganando altura a un ritmo tan rápido que los oídos zumban, y al descender atravesamos campos verdes que alternan con profundos barrancos. El esmeraldino paisaje sorprende por lo manso, y a la vez por lo aprovechado por el hombre, agricultor aquí por necesidad, lo que necesariamente provocó la codicia de los bandidos atrincherados en Cremna y Sagalassos, desde donde azotaban el país con sus aceifas hasta que la *pax romana* acabó con ellos.

Hacemos un breve alto en Egirdir, una población sorprendente, enclavada en un lugar mágico, en una península que se interna como una flecha en un alucinante lago de aspecto

totalmente alpino. Nos apetecería quedarnos allí un tiempo disfrutando de la hospitalidad de sus gentes y del estremecimiento profundo que procura su paisaje, pero es preciso seguir hacia Antioquía de Pisidia (ojo: no confundirla con Antioquía de Siria), punto cardinal de nuestro viaje paulino. El largo discurso que se nos narra en *Los hechos de los apóstoles* fue pronunciado por Pablo en la sinagoga en la vana esperanza de conmover a los judíos locales. Pero éstos reaccionaron intrigando hasta conseguir la expulsión de los dos misioneros. Consecuencia de ello fue esa decisión antes comentada: se acabó, el cristianismo es para todos, los judíos son unos más frente a él.

Conque henos aquí en la ciudad, hoy Yalvaç (pronúnciese /*yalvach*/). No podemos evitar sentirnos sobrecogidos ante los restos de la ciudad antigua, entre los que la vedette es, cómo no, la antigua iglesia de san Pablo, hoy arrasada pero puesta al descubierto por los diligentes excavadores. Claro que este templo no existía cuando san Pablo estuvo aquí. Dos siglos más tarde de su estancia, ya triunfante el cristianismo, fue edificado precisamente sobre la antigua sinagoga, en un claro mensaje al judaísmo entonces en retroceso. Vednos en la foto posando en los restos del teatro; en estas mismas gradas estuvieron sentados san Pablo y Bernabé.

Un grupo católico alemán decía misa devotamente sobre las ruinas. Un rito repetido una y otra vez gracias a la permisividad de las autoridades turcas, proeuropeas y tolerantes. Devotos, pero algo paletos: no acababan de saber qué clase de ciudad era aquélla, ni el punto exacto del templo, pero, ¿importa eso tanto? Ante la devoción retroceden las racionalidades.

A medida que prosigue nuestra internada hacia el corazón de Anatolia entramos en la antigua Licaonia y cambia el paisaje, surgiendo las planicies áridas que tanto recuerdan nuestra Castilla. Las ciudades son cada vez más replegadas, y surgen problemas incluso para hallar lugares para comer (llamarlos restaurantes sería sin duda pomposo). Pero la amabilidad indígena suple los defectos. Compelidos a cambiar para reponer gasolina, entramos en un establecimiento bancario al azar. No tienen cambio, pero el jefe delega a su ayudante para que nos acompañe a través de media ciudad hasta el único punto donde van a aceptarnos dólares. Cuando las necesidades fisiológicas nos apremian, nos acompañan a las casas particulares para que podamos aliviarlas. La hospitalidad turca es una constante en el camino.

El siguiente punto, Iconio, es la actual Konya, ciudad en medio del desierto, sede de los monjes giróvagos, que danzan horas y horas buscando la conexión con la divinidad a través del mareo. El hermoso romance de amor místico constituido por las *Acta Pauli et Theclae*, compuesto en Asia bajo el reinado de Marco Aurelio, sitúa en Iconio el lugar de encuentro entre Pablo y la que se convertiría en la más fiel de sus discípulas.

Hoy Konya es una metrópoli de un millón de almas, donde se hace imposible hallar el menor rastro paulino. Sólo unas decrépitas ruinas, mal protegidas por una cúpula moderna, nos recuerdan que allí estuvo la capital de los turcos seljúcidas mil doscientos años después del apóstol. Mejor continuar.

Listra, que conserva su nombre, situada en los confines de la Licaonia y la Isauria, es en cierto sentido más auténtica que Yalvaç. Cuesta llegar a ella, pero lo conseguimos a pesar de la niebla y la lluvia. Una siniestra montaña erizada de picachos y chispeada en su falda por viviendas trogloditas. Al pie, una mísera aldea embarrada y casi desierta. Ni rastro de las antiguas construcciones, pero las actuales seguro que son idénticas a las que vieron Pablo y Bernabé. Y los habitantes, pobres y desconfiados, siguen siendo los mismos, ésos que, entusiasmados por la oratoria de los apóstoles, los tomaron por dioses y pretendían adorarlos. Pobres ignorantes, como sin piedad los calificaba Cicerón, que había estado allí un tiempo. Doblemente ignorantes cuando tras la fase fanática inicial cambiaron bruscamente de opinión por las difamaciones que les llegaron desde Antioquía e Iconio. Apedrearon a san Pablo, dejándolo por muerto. Bernabé, que lo recogió, lo ayudó a marchar hacia Derbe buscando mejores aires.

Con todo, una importante semilla había quedado en Listra: el joven Timoteo, que Pablo reencontraría hecho un hombre en el segundo viaje, y que colaboraría eficazmente con él desde Efeso, de donde fue nombrado obispo. No hay que decir que ni una triste placa recuerda hoy su ilustre paisano a los listrenses, pero quizá sea esto mejor: la emanación de autenticidad se mantiene así en estado puro. Y de nuevo estamos en la ruta, como hicieran los Pablo y Bernabé, hacia Derbe, en la vertiente septentrional del Tauro ciliciano, donde finalmente serían acogidos y triunfaría su palabra. Las jóvenes iglesias licaonas, formadas mayormente por gentiles, adquirieron una fisonomía desconocida, en la que el recuerdo de la sinagoga se esfumaba.

También la población de la actual Derbe es la misma de los tiempos paulinos, un conjunto de barracas de tapial y paja desperdigadas bajo el sol inclemente. Sus niños huían despavoridos ante nuestras cámaras, y los adultos, por otra parte muy amables como todos los turcos, creyeron que nos

referíamos a la ciudad brasileña de Sao Paulo cuando les preguntamos por el apóstol. El tranquilo cementerio musulmán junto a la carretera, con sus placas mayormente en caracteres árabes (la reforma de Atatürk lleva menos de un siglo) era el único lugar ajeno al tiempo y al credo de cada uno. Resultaba inevitable concluir allí que, a fin de cuentas, poco importaba la creencia de cada uno en su dios particular, sino la forma en que ésta se hubiera sentido.

De hecho aquí se acababa el primer viaje de san Pablo. Por razones que todavía hoy escapan a los historiadores, en ese pueblo dio media vuelta y desanduvo lo andado hasta Atalia, para embarcar allí. Pero nosotros no vamos a seguirle. Atravesaremos de nuevo el Tauro por las puertas de Cilicia, esas mismas que un día vieron pasar los ejércitos de Alejandro Magno a la conquista de Persia, y nos dejaremos caer, casi volando, sobre Tarsus, la ciudad natal de nuestro hombre. Tampoco queda allí nada de él, salvo el recuerdo y las alusiones turísticas: un pozo, un solar, muy posteriores, pero algo tiene que fotografiar el turista. Por añadidura, la puerta bajo la cual se conocieron Marco Antonio y Cleopatra, cuyos restos mal aplacados por piedra nueva tienen al menos la virtud de la autenticidad.

Tarsus quizá sea poco para quien busca afanosamente la fotografía, pero mucho para quien se entretiene en evocar el suceso a través del lugar. La naturaleza del ubérrimo llano aluvial de Çukurova, centro de la prosperidad agrícola turca, nos evoca un tiempo en que era posible crecer arrullado por la cultura griega pero intuyendo unas nuevas realidades que iban a conmover al mundo.

Recorriendo esos llanos se acabó la trayecto. En Adana, el avión nos llevó hacia Estambul y su siempre complaciente Gran Bazar. Una gaviota sobre la terraza del hotel, mientras desayunábamos, ponía contrapunto vital a la mezquita de Ahmet. La Pamfilia, la Pisidia, la Galacia, el Tauro, los llanos de Çukurova quedaban atrás. Regresábamos más conscientes de nuestros orígenes, y con una sana admiración por quien fue capaz de crear una nueva religión a partir de unos simples borradores galileos.

Josep M. Albaigès, junio 2001

UN POCO DE GIMNASIA MENTAL

¿Qué número sigue a cada una de las siguientes sucesiones y por qué ?

1ª .- 1,4,5,9,10,15,24,26,32,37,40,45,53,62, ...
2ª.- 12,15,21,24,30,33,39,51,57, ...
3ª.- 0,1,5,14,21,28,37,50,60, ...
4ª.- 188,161,143,115,97,...
5ª.- 312,281,253,222,192,161,131,100, ...
6ª.- 99,98,92,86,83,75, ...
7ª.- 7,1,8,9,17,26,43, ...
8ª.- 15,16,17,19,22,27,35,48, ...
9ª.- 3,2,2,7,11,20,38, ...
10ª.- 2,2,1,1,6,10,18,35, ...
11ª.- 76,57,34,13,0,1,22, ...
12ª.- 180,267,348,417,462,459,360, ...
13ª.- 10,11,13,16,21,28,38,52, ...
14ª.- 543,525,479,385,322,270,209,119,79, ...
15ª.- 546,476,435,423,341,288,264,170,105, ...
16ª.- 31,32,39,41,42,45,50,53,58,60,61,68, ...
17ª.- 2,3,9,10,18,18,21,24,33,41,49,56,60, ...
18ª.- 564,407,275,190,106,93,81,76,72, ...
19ª.- 390,237,168,129,102,...
20ª.- 92,85,82,76,75,73, ...
21ª.- 38,41,45,49,53,58,63, ...
22ª.- 17,3,94,32,85,21,117, ...
23ª.- 0,1,5,14,15,21,23,28,31,37,41,50,56,60,68, ...
24ª.- 1, -23/3, -49/3, -19, -29/3, 53/3, ...
25ª.- 1000101, 2120, 1011, 234, 153, 126, 105,76, ...
26ª.- 11106444, 555322, 27766, 1388, ...
27ª.- 999, 996, 969, 966, 699, 696, 669, 666, 96, ...
28ª.- 35/4, 33/2, 30, 51, 75, ...

Acebrian, 0201

SOLUCIONES A LAS SUCESIONES (UN POCO DE GIMNASIA MENTAL)

El 69 es el número que sigue a cada una de las 28 sucesiones. Así:

1ª.- La diferencia de cada término con el anterior es cada uno de los dígitos de PI= 31415926535897 seguiría. 62+7 = 69
2ª.- Cada número es = el anterior + sus dígitos. Así 51+6= 57; 57+12 = 69
3ª.- La diferencia de cada término con el anterior = 1,4,9,7,7,9,13,10 son la suma de los dígitos de la serie de cuadrados 1,4,9,16,25,36,49,64,81. → 60 +8+1 = 69
4ª.- Las diferencias = 27,18,28,18 son los dígitos del número "e"= 2,71828182845 en grupos de 2 cifras. → seguiría = 97 – 28 = 69
5ª.- Las diferencias = 31,28,31,30,31,30,31 son los días de los meses del año. → seguiría 100 – 31 = 69.
6ª.- Las diferencias = 1,6,6,3,8 son los dígitos de la equivalencia 166,386 Ptas. = 1 Euro → seguiría 75 – 6 = 69
7ª.- Cada término es = la suma de los dos anteriores. → 26 + 43 = 69
8ª.- Las diferencias son los números de la serie Fibonacci = 1,1,2,3,5,8,13, → 48 + 21 = 69
9ª.- A partir del 4º término cada número es la suma de los 3 anteriores, → 11+20+38 = 69
10ª.- A partir del 5º término cada número es la suma de los 4 anteriores; → 6+10+18+35 = 69
11ª.- Serie generada por $n^3 - 8n^2 - 2n + 85$, dando valores n = 1,2,3,.. → para n = 8 → 69
12ª.- Cada término = 2 por el anterior – 93 por la serie 1,2,3,4...
$t_n = 2 \cdot t_{n-1} - 93 \cdot n$ → $2 \cdot 360 - 93 \cdot 7 = 69$
13ª.- Las diferencias = 1,2,3,5,7,11,13, son la serie de los números primos → 52 + 17 = 69
14ª.- Las diferencias = 18,46,94,63,52,61,90,40, son los cuadrados de 9,8,7,6,5,... con los dígitos en orden inverso → 79 – 10 = 69
15ª.- Las diferencias = 70,41,12,82,53,24,94,65, son los primeros múltiplos de 7 con los dígitos en orden inverso → 105 – 36 = 69
16ª.- Las diferencias = 1,7,2,1,3,5,3,5,2,1,7, son los dígitos de los números combinatorios C^7_n desde n = 0 a n = 7; 1,7,21,35,35,21,7,1 → 68+1 = 69
17ª.- Las diferencias = 1,6,1,8,0,3,3,9,8,8,7,4, son los dígitos del número aúreo = $(1+5^{0,5})/2$ → dígito siguiente 9 → 60+ 9 = 69
18ª.- Las diferencias = -157,-132,-85,-84,-13,-12,-5,-4, forman ternas pitagóricas encadenadas (157,132,85), (85,84,13), (12,5,4), (5,4, sigue el 3) → 72-3=69
19ª.- Cada término es = al anterior por 1,2,3,4,5,6 menos 543
$t_n = n \cdot t_{n-1} - 543$ → $102 \cdot 6 - 543 = 69$
20ª.- Cada término es = al anterior – la diferencia de sus dígitos 73 –(7-3) = 69
21ª.- Cada término es = al anterior + sus decenas → 63 + 6 = 69
22ª.- Las diferencias = -14, +91, -62, +53, -64, +96, son los dígitos de los cuadrados de 1,2,3,4,5,6,7,.. en grupos de 2 cifras alternando - + → 117 – 48 = 69
23ª.- Las diferencias = 1,4,9,1,6,2,5,3,6,4,9,6,4,8 son los dígitos de los cuadrados de 1,2,3,4,5,6,7.. → 68 + 1 = 69
24ª.- Los términos de esta serie son los valores que toma $n^3 - 6n^2 + 7n/3 + 11/3$ para n= 1,2,3,4,... → n = 7 → 69
25ª.- Los términos son los valores de 69 en base 2,3,4,5,.. en base 9 = 76; en base 10 = 69
26ª.- Cada término es la parte entera del cociente entre el anterior y 20.
$T_n =$ Entero (T_{n-1} /20) → Entero (1388/20) = 69
27ª.- Los términos de esta serie son los distintos números de 3 y 2 cifras que se pueden formar con los dígitos 6 y 9 y ordenados en sentido decreciente. Sólo falta el 69.
28ª.- Cada término es = al anterior por 2 menos $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$,..
$t_n = 2 \cdot t_{n-1} - 3^n$, → $2 \cdot 75 - 3^4 = 69$

Acebrián 0201

FE DE ERRATAS

El sagaz ojo de mi colega Antonio García Martínez ha descubierto un par de errores en los artículos publicados en [C-68]. El primero se halla en UNA VARIANTE DE TARTAGLIA, en cuyo desarrollo matemático se comete al final lo que él llama indulgentemente "un leve pecado de lesa matemática", ya que el correcto desarrollo debería ser:

Por cierto que este valor es fácilmente calculable. En geometría métrica elemental se demuestra que $m_a = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}/2$, y sustituyendo, se obtiene:

$$r^2 = b^2 + c^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a) - 2bc$$

Si, como es costumbre, se hace *p = (a+b+c)/2*, se halla finalmente:

$$r = \sqrt{4p(p-a) - 2bc}$$

Añade Antonio una interesante observación, que transcribo:

[El valor *2bc*] por otra parte es el numerador del valor de cos A, lo que nos lleva a dos conclusiones interesantes:

Si el triángulo en A su coseno es nulo la circunferencia lugar geométrico se reduce a un punto: su centro.

Si el triángulo es obtusángulo en A, con coseno negativo, tendrá los dos lugares correspondientes a los ángulos B y C, pero el correspondiente a A habrá desaparecido al tener radio imaginario.

Este tipo de transformaciones es muy frecuente al operar con los valores de los lados de un triángulo para el cálculo de medianas, bisectrices, etc., y en este caso el terreno conocido resultó fatal al propiciar apresuramientos. Mea culpa.

El segundo error aparece el el artículo LOS PELIGROS DE LA INDUCCIÓN INTUITIVA, donde copié una fórmula sin comprobarla. En realidad la correcta es:

$$E(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1 = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24} + 1$$

No obstante, los valores de la tabla sí eran correctos.

Todavía un detalle más: la fórmula dada en la página 27 contenía una ligera errata, pues debía ser 2^{n-1} en vez de 2^n. Más lectores han señalado el desliz.

Agradezco de veras a todos ellos sus constructivas aportaciones, y les animo a continuar contribuyendo al rigor que nuestra revista debe tener.

JMAiO, abr 01