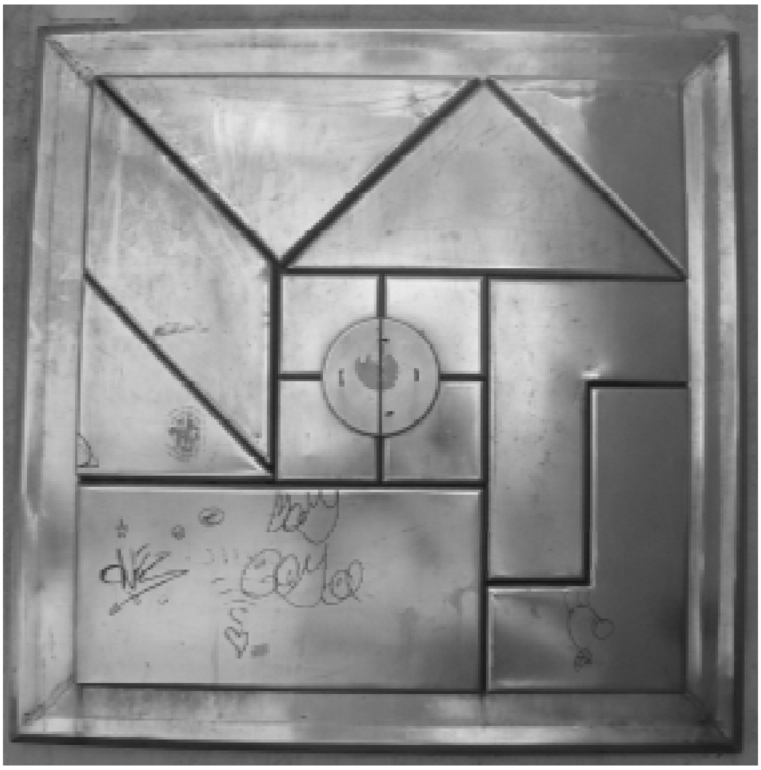


Carrollia

No 83, dic 04

CARROLLIA

Dirección en la web: **www.mensa.es/carrollia**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès	**Francesc Castanyer**	**Pedro Crespo**
jalbaiges@ciccp.es		pedrocqbar@yahoo.es

83

Primo. Las reglas monacales de san Benito de Nursia eran 83.
Cuando hablaron con el faraón, Moisés contaba 80 años y Aarón 83 (Ex 7,7).
En loterías es “la dama y el niño”.

ÍNDICE

Portada: El «Stomachion» de Arquímedes, uno de los escasos homenajes, aunque parezca mentira, dedicados en la mismísima Siracusa a la memoria de una de las más portentosas cimas del pensamiento científico. En este mismo ejemplar de [C] se ofrece una breve explicación de este artilugio.

Bueno, ya podemos hablar de España, no de USA

Inicia la ronda de este número Mariano Nieto, de Madrid, con una de sus dinámicas cartas, llenas de referencias viajeras, cuestiones matemáticas y notas amenas en general.

A propósito de nombres ya te comenté en otra ocasión los que descubro cada vez que viajo a Portugal; este año me he topado con Elidérico, Acilio, Lutgero y Edivaldo, el año pasado con Diamantino y Jesuvino, y años atrás con Adruzilo, Alcindo, Maurilio, Elmano, Acúrcio, Isaltino, Idalina, Natércia, Cremilde y otros más, también descubrí que Pelagio en portugués es Paio.

Cruzamos la frontera por **Quintanilha** (donde Portugal acaba de decidir la construcción de un nuevo puente internacional) continuando hasta **Braganza**, pues nos encontrábamos visitando la zona oeste de la provincia de Zamora; hicimos una bonita excursión en barco por los **Arribes del Duero** a la altura de **Miranda do Douro**. Es increíble la profunda erosión del río en la roca granítica; sobre la pared vertical de uno de los acantilados aparece un gran número **2** que se ha formado naturalmente y, claro, se llama el acantilado del 2. Dimos una vuelta por Miranda pueblo donde se habla un curioso dialecto. En mirandés Portugal es Portual. Cerca de Puebla de Sanabria se encuentran dos pueblecitos, uno español, **Rihonor de Castilla**, y otro portugués, **Rio de Onor** que en realidad son un solo pueblo dividido por la frontera.

En Luso solemos encontrarnos con un Ingeniero de Caminos de Vigo, **Manuel Leirós,** quien me comunicó el problema que he titulado "**El juego de los objetos apilados**" que te adjunto; descubrir la estrategia ganadora es realmente difícil. Coincidimos allí con otro amigo portugués, **José Pereira**, catedrático de "Epistemología Genética" (génesis del saber) en la Universidad de Viseu, un hombre que estudió en Salamanca y que habla español; es muy locuaz y aunque con nosotros siempre empieza hablando en español, luego se embala y termina exclusivamente en portugués. Le presenté a Leirós y al saber que era gallego dijo "**Galicia es Portugal sin independencia**". Durante mi estancia en Luso leí una "**Historia Elementar de Portugal**" y como era de esperar los malos de la misma somos los españoles; los 60 años de los Felipes I, II, y III (II, III y IV de España) fueron de decadencia (no opina así Pereira). Parece como si les hubiéramos robado Galicia cuando en realidad fue **Afonso Henriques** el que se enfrentó a su propia madre doña **Teresa** y logró arrebatarle el condado de **Porto Cale** mientras ella tuvo que refugiarse en Galicia.

Pereira soltó también un dicho portugués, "**De España ni bom vento, ni bom casamento**", que pone en evidencia el sentido tribal que impregna a la humanidad. Supongo que frases de este tipo las hay por todos los rincones del planeta.

A primeros del próximo octubre se reunirán en una "cimeira" Santana y Zapatero para hablar del Mercado Ibérico de la Electricidad (los portugueses le llaman el MIBEL) y de los enlaces por tren de alta velocidad entre los dos países; la prensa portuguesa afirma que el primero será entre Oporto y Vigo y que estará funcionando en 2009. ¡Habrá que verlo!

Mi cuñado farmacéutico Álvaro Domínguez es gran aficionado a los toros tema sobre el que ha escrito varios artículos, uno de ellos se titula "**El número tres y la tauromaquia**" que te adjunto por si cabe en Carrollia.

¿Qué tal la lectura de Nostromo? ¿Sabías que Conrad participó en las Guerras Carlistas en España?

Otro tema: En el número 20 de **Carrollia** se publicó (página 32), un problema remitido por mí titulado **Cruzando el desierto en jeep** y se daba la solución de 3,47 cargas, sin explicación de cómo se llega a ella. He vuelto a repensar este problema y soy incapaz de llegar a esa cifra, sólo llego a 4 cargas. ¿Podríais tú o Crespo echarme una mano?

Los nombres de persona que citas delatan la afición etimológica de los portugueses. Algunos existen en español también (poco usados), a veces con grafías algo distintas: Acilio, Ludgerio, Maurilio, Acurcio (observa que los portugueses acentúan "a la catalana", pues tampoco para ellos existen diptongos ascendentes). Paio es no sólo portugués sino también gallego, de él procede el apellido Páez.

La prevención portuguesa contra el "poderoso vecino del este" es secular, pero justificada. Felipe II tuvo buen cuidado de no herir sensibilidades designando siempre personas autóctonas para los cargos importantes, pero esta regla la quebraron el duque de Lerma y el conde-duque de Olivares, que empezaron a tratar a Portugal como una provincia y no como un reino independiente con monarca común a Castilla.

Sí, sabía que Joseph Conrad estuvo en España en su época idealista; supongo quedaría horrorizado ante la brutalidad de la tercera guerra carlista, que conmovió a toda Europa, aunque sacaría ideas para la desesperanza que impregna muchos de sus libros.

Gracias por el artículo sobre el 3; el número de [C] adecuado para publicarlo habría sido en el 81 (= 3·3·3·3), pero no será malo en el 83 (= 333/3 - 3·3·3 – 3/3, también = 33 + 3·3·3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3/3 + 33/33, donde el 3 aparece 18 veces, las mismas que es citado en el artículo).

El problema que llamas "El juego de los objetos apilados" se llama Nim, y lo vi por primera vez en una insólita (entonces) película de Alain Resnais llamada *El año pasado en Marienbad*, que estrenaron siendo yo estudiante (años 60). En ella se introducía un lenguaje cinematográfico con idas y venidas a través del tiempo, hoy corriente, pero que a la sazón desconcertó sobremanera. Aparecía allí un extraño personaje que jugaba sin cesar con otros al juego, ganando siempre infaliblemente. Entre los estudiantes se popularizó mucho, y los había la mar de diestros en él.

La estrategia que citas es la canónica para el "juego directo", es decir, aquél el que gana quien retira la última ficha. Para el pierde-gana, que es el habitual, se sigue la misma estrategia, cambiando en el último momento.

CRUZANDO EL DESIERTO EN JEEP
(Publicado en [C -20])

En la linde de un desierto se encuentra un depósito de gasolina de capacidad ilimitada; el desierto tiene una anchura de 800 km y en él no es posible encontrar suministro de combustible. Un jeep puede llevar suficiente gasolina para recorrer 500 km (a esto lo llamaremos una "carga"), y puede establecer depósitos intermedios en cualquier lugar del desierto a lo largo de su camino.

a) ¿Cuál es la menor cantidad de gasolina (en "cargas") que necesitará el jeep para cruzar el desierto?
b) ¿Habría un límite en su anchura para poder ser cruzado por el jeep?

SOLUCIÓN: a) 3,47 cargas (16 viajes)
b) No.

En cuanto al problema de los camiones, hay que entenderlo de modo que el vehículo no puede llevar bidones de combustible en su caja, sino que debe dejar en los depósitos parte del contenido de su propio tanque. Resulta que el problemita dio la mar de juego entre Mariano, Pedro y yo. Cada uno de ellos aportó estrategias para llevar y traer cargas, y temo que encontrar la mejor sería un problema dificilísimo, aun con la ayuda de ordenador.

En todo caso, sí puede hablarse de un límite inferior a las cargas necesarias, que surgiría del siguiente razonamiento:

Es obvio que la travesía del desierto se reduce a conseguir llevar una carga neta a una distancia de 300 km. Conseguido esto, el camión concluye la travesía sin dificultad.

El quid de la idea para hallar el límite inferior de las cargas necesarias se basa en la subdivisión de los viajes en etapas muy cortas, lo que es desastroso para el tiempo empleado, pero redunda en un menor consumo de cargas. Si llevamos la carga 500 (medida en km potenciales) a una distancia x, depositamos allí todo lo posible para poder regresar y volvemos al punto de repostamiento, habremos trasladado 500 – 2x netos. Pero si en vez de esto fijamos el punto de traslado a la distancia x/2, llegan en un primer viaje 500 – x, y si ahora, tras regresar, llevamos otra carga igual hasta x, llegarán $(500 - x)(500 - x) = (500 - x)^2 > 500 - 2x$..

Un ejemplo para aclarar ideas. Si llevamos 2500 unidades a 100 km (en una tanda de cinco viajes de ida y vuelta) llegarán netas 1500 unidades. Pero en vez de eso, en una tanda de 5 viajes llevemos las 2500 unidades a 50 km, con lo que llegarán 2000 unidades. Y si ahora, con nueva base en este punto a 50 km del origen, llevamos en una segunda tanda de 4 viajes las 2000 unidades 50 km más lejos, habrán llegado finalmente 1600 unidades. Hemos mejorado la eficiencia al no tener que gastar combustible para transportar combustible.

Se trata, pues, de fraccionar en lo posible los viajes, estableciendo el mayor número posible de postes a distancias lo más pequeñas posible, que serán llenados cada uno desde el poste anterior, de forma que no queden sobrantes de combustible.

Sitúense n postes a distancias $x = 300/n$ entre sí. El consumo del transporte de una cantidad q de cargas (en el número de viajes que haga falta) al primer poste P_1 habrá sido $2qx/500 = 1{,}2q/n$, por lo que llegan $q(1 - 1{,}2/n)$.

Se transporta ahora ese resto de carga al Poste P_2. Esta vez el consumo es $1{,}2q/n(1 - 1{,}2/n)$, y llega $q(1 - 1{,}2/n)^2$.

Y así sucesivamente. Al final, llegará al poste P_n la cantidad $q(1 - 1{,}2/n)^n$.

Aumentemos indefinidamente el número de postes. La anterior expresión tiende a $qe^{-1{,}2}$.

Para que llegue al poste n-ésimo una carga, deberá ser $qe^{-1{,}2} = 1$, o sea $q = e^{1{,}2} = 3{,}32$ cargas = 1660 unidades.

Insisto en que esto presupone una infinita divisibilidad de los viajes; en la práctica, algunos serán ineficaces porque sólo se llevará en ellos media carga, o porque no vale la pena retroceder para recoger pequeños sobrantes de la tanda de viajes anterior. El valor hallado supone un límite, y se estará más o menos cerca de él según la habilidad para programar la mejor estrategia.

El mensista Miguel Reygondaud (`mreygondaud@zeleris.com`) plantea una interesante cuestión, que brindo a todos:

Hola. Disculpa el asalto. Soy socio de Mensa (E-01272) y quisiera participarte de un problema que D. Ernesto Sánchez del Cos envió a *mensaabierta*. En privado lo hemos discutido. Yo ni soy matemático, ni domino esta materia, pero creo que este juego puede ser interesante para "forofos".

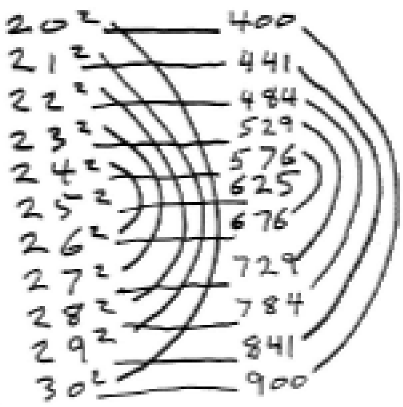
El juego dice así: Se disponen sobre una mesa 100 fichas numeradas del 1 al 100. El primer jugador debe retirar una ficha par, la que desee. El segundo jugador deberá retirar entonces otra ficha que sea un múltiplo o submúltiplo de la que retiró el primer jugador. El primer jugador deberá retirar a su vez otra ficha que sea un múltiplo o submúltiplo de la que retiró el segundo jugador. Los jugadores deben proceder así, de forma sucesiva. Las fichas que se retiran no se reintegran al juego. Pierde el jugador al que no le es posible retirar ninguna ficha. ¿Existe alguna estrategia ganadora para alguno de los jugadores? Al parecer se trata de un famoso juego conocido por Juniper Green.

Por lo visto, ha quedado demostrado que en este juego gana el primer jugador.

Espero que resulte interesante.

Miguel mandaba una posible solución, que resultó insuficiente. Pero ahí queda, abierto el tema. Al parecer, éste fue propuesto ya por Ian Stewart en *Investigación y Ciencia*.

Robert L. Birch, un habitual en esas páginas, en carta dirigida a Antonio Casao, que éste me ha reexpedido gentilmente, comenta:



Estimado colega: Se me ocurrió que esta lista pudiera ser de su interés. Es curioso que 25^2 sirve como eje, y los cuadrados se distan en incrementos de 100.

Claro es que esta curiosa propiedad es debida a que la diferencia $(25+x)^2 - (25-x)^2 = 100x$. Esta singularidad numérica ha sido aprovechada en juegos y pasatiempos.

Daniel Vigo, un lector de la FCI, manda una relación de curiosos inventos, dignos de patente emérita:

Ahora atiendo al boletín Oficial de las Ciencias Inútiles, por el que les descubrí el otro día, el cual estaba dedicado a los inventos inútiles. Como curiosidad le haré una pequeña lista de curiosos inventos musicales. Mi tiempo es oro, y aquí van unos preciados minutos musicales.

- Boris Vian en su libro *La espuma de los días* habla de un piano-cocktail, donde cada tecla pulsada servirá para que una cantidad de alguna bebida se deposite en una coctelera, de modo que al terminar de tocar una pieza, encontremos una bebida acorde con la melodía.
- Alessandro Baricco en su libro *Novecento*, crea a un personaje inventor realmente curioso, el profesor Perish, famoso por inventar del humanófono. A cada habitante de un poblado se le asignará un pito y una nota. De forma que cada habitante corresponderá de por vida a una nota musical. Luego ató una cuerda desde los pulgares de sus músico-habitantes a un tablero con el que dirigía tan extraña orquesta.
- El artista Xul Solar al que Borges admiró durante toda su vida aparte del conocido panajedrez también inventó un espectacular piano circular.
- El pintor y músico Luigi Russolo adherido al movimiento futurista fue especialmente conocido por la invención de algunos nuevos y extraños instrumentos. Entre ellos destacan el Rumorarmonio y el Arco enarmónico.
- El inventor Maelzel (el del jugador de Maelzel de Poe), aparte de inventar su especial metrónomo, inventó también espectaculares instrumentos musicales. Uno de ellos era el Panarmónico, que eran varios instrumentos de viento interconectados que sonaban por mediación de un fuelle.

En otra carta, Carlos del Amo Montoya aclara, atendiendo mi petición, que fue quien me dio la regencia del artículo en Internet que sirvió para la elaboración del de la ruleta. Muchas gracias, Carlos.

Y esto es todo por este trimestre. ¡Feliz Navidad y feliz 05!

El editor

Hospital Aki Temato

Director: Dr. Sekuro Ketekura
Anatomía patológica: Dr. Revisao Enchikito
Cardiología: Dr. Tecambio Tuválvula
Cirugía Plástica: Dra. Tarrota Tujeta
Dermatología: Dr. Tukuero Taduro
Endoscopias: Dr. Temeto Tubito
Fisioterapia: Dra. Tesuda Toíto
Gastroenterología: Dr. Tesobo Tupanza
Geriatría: Dr. Yayospor Untubo
Ginecología: Dra. Tesano Lakosa, Dr. Yositoko Tukuku y Dr. Yositoko Tucosita
Hematología: Dra. Tefluye Plaketa
Inmunología: Dra. Loawanta Toíto
Laboratorio: Dra. Temira Tukaka
Mamografía: Dr. Tesobo Tuteta
Medicina preventiva: Dra. Tamumal Kelosepas
Neumología: Dra. Tutose Mufuete
Neurología: Dr. Suturo Tukoko y Dra. Tarrota Lajeta
Obstetricia: Dra. Tepalpa Podentro
Odontología: Dr. Tekito Lakarie
Oftalmología: Dr. Temiro Lozojo
Ortopedia: Dr. Tarreglo Tuweso
Otorrinolaringólogo: Dr. Yosi Tesako Mokito
Pediatría: Dr. Tekuro Lonene y Dra. Jodekon Lokrio
Proctología: Dr. Temiro Kulete y Dra. Tukulito Sacayama
Psiquiatría: Dr. Tarayado Tukoko
Radiología: Dr. Tomemo Lafoto y Dra. Memola Lafoto
Reumatología: Dr. Tarreklo Tuweso
Urgencias: Dr. Tekuro Yamismito
Urología: Dr. Tunabo Taduro

(Tomado de *Anécdotas de la medicina*, por Pedro Ramos)

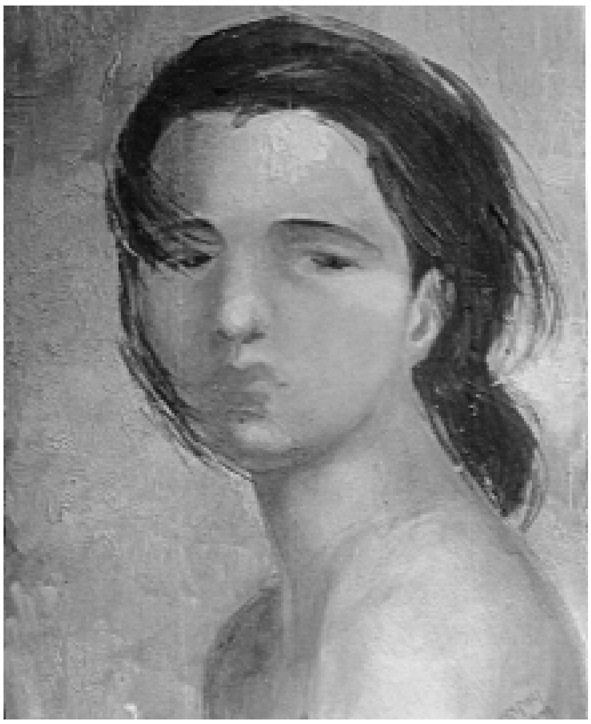
CARO MENOTTI

Así titulé un artículo necrológico aparecido en Omnia, el órgano de Mensa, en su número 46 (enero-marzo 1995), glosando a mi desaparecido amigo. Muchos mensistas recuerdan, con un deje de nostalgia y cariño, el paso de Menotti Cossu, el escritor de matemática recreativa y presidente de Mensa Italia, a la que supo imprimir un dinamismo y calidad poco comunes, que para nosotros fue ejemplo. Diez años han transcurrido ya desde su óbito, en noviembre de 1994, y Menotti vuelve a ser noticia por un doble motivo. Su viuda, la simpática Valeria, ha editado un recordatorio que me permite publicar hoy por primera vez, creo, su fotografía en una revista de Mensa España. No puede darse mejor epitafio que el que figura en la esquela:

Chi l'ha conosciuto e l'ha amato non potrà mai dimenticarlo.

A muchos mensistas españoles nos enorgullece figurar en ese grupo y conservamos vivo el recuerdo de su paso.

Dije antes que Menotti es otra vez noticia, ahora por un precioso álbum que Valeria ha dedicado con las mejores pinturas de la que fue su madre, Anna Cassola (1907-2002), una mujer valiente, asombrosa-mente parecida a su hija en talento, en cultura y en simpatía. Dice Dino Carlesi, su biógrafo: *Insistiamo nel dire che, non apartenendo a Scuole e Tendenze, Anna Cassola percorse con coerenza in suo itinerario dentro il tempo reale che la circondava, senza farsi copista e imitarice delle altrui poetiche: il suo fu un realismo lirico trasferito ai limiti della trasfigurazione poetica*." El *Retratto di ragazza* (Roma, 1931) con que acompañamos estas líneas es un buen exponente de una búsqueda de una expresividad poética e irreal, en un estilo personalísimo.



Ambos nos han dejado aquello por lo que una persona merece ser recordada: sus obras, comprendiéndose entre ellas los afectos que supieron crear.

Josep M. Albaigès i Olivart
Barcelona, noviembre 2004

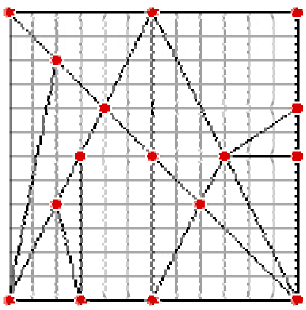
El «Stomachion» de Arquímedes

Existen dos manuscritos fragmentarios atribuidos a Arquímedes y que tratan de un antiguo juego que los griegos llamaban Stomachion (Στομάχιου). Uno de ellos nos ha llegado a través de una traducción árabe, y el otro es griego, datado en el siglo X y descubierto en Constantinopla en 1899. No se sabe si el juego fue inventado por Arquímedes o si bien se limitó a explorar sus aspectos geométricos, lo que es la suposición más plausible. Hay muchas otras referencias al juego en la literatura antigua, de las cuales dos se refieren al mismo como *loculus Archimedias* (la caja de Arquímedes). La palabra Stomachion tiene su raíz en la palabra griega para designar al estómago (στόμαχοζ), pero su significado no está claro.

El juego consiste en 14 piezas de marfil de formas poligonales diversas, formando inicialmente un cuadrado, como se puede ver en la portada. La finalidad del juego es la de disponer las piezas de modo que el conjunto diseñe una forma interesante (personas, animales, objetos, etc.); una de ellas, un elefante, nos ha llegado a través de un manuscrito de Ausonius, poeta y estadista romano del siglo IV a. C., el cual compara el Stomachion a una modalidad de poesía en la cual se unen métricas distintas. Muchos habrán reconocido sin duda en este juego la versión griega del Tangram chino, de mayor economía de elementos (siete piezas).

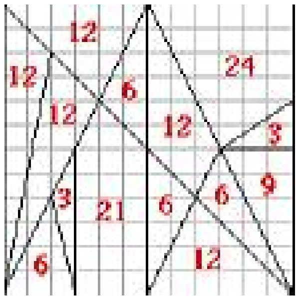
El manuscrito griego atribuido a Arquímedes es bastante incompleto y trata de las relaciones de los diversos ángulos de las piezas. El manuscrito árabe proporciona más información, y describe una construcción del Stomachion, además de calcular las áreas de sus piezas.

Un modo de construir el Stomachion, distinto del que figura en el manuscrito árabe aludido, es el siguiente: se comienza con una cuadrícula de 12 x 12. Si se supone que cada uno de los pequeños cuadrados tiene área unidad, el área del cuadrado total será 144.



Se trazan líneas que pasan por los puntos indicados de la cuadrícula. Las líneas dividen al cuadrado en 14 polígonos, de tres, cuatro y cinco lados. Estos polígonos forman las 14 piezas del Stomachion.

El manuscrito árabe contiene también los cálculos de las áreas de las piezas. Muestra que dichas áreas están en proporción con el área del cuadrado total según las ratios 1:48 (dos piezas de área 3), 1:24 (1:24 (4 piezas de área 6), 1:16 (1 pieza de área 9), 1:12 (5 piezas de área 12), 7:48 (1 pieza de área 21), y 1:6 (1 pieza de área 24).



El método moderno de calcular las áreas de los polígonos de tipo cuadrícula como los anteriores hace uso del llamado teorema de Pick. Este teorema proporciona la fórmula del área de un polígono de tipo cuadrícula, es decir de uno cuyas fronteras consisten en una serie de segmentos de línea conectados sin intersecarse.

La fórmula de Pick para el área es = $I + B/2 - 1$, en donde

I = número de puntos de cuadrícula interiores ( )
B = número de puntos de cuadrícula fronterizos ( )

El teorema de Pick apareció originalmente en

Georg Pick
"Geometrisches zur Zahlenlehre"
Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift
Prague, Volume 19 (1899) pages 311-319.

P. Crespo, noviembre 2004
(información «pescada» de la red)

EL JUEGO DE LOS OBJETOS APILADOS

Este juego consiste en lo siguiente. Cierto número de objetos se disponen en ***k*** filas de manera que en la fila *n* haya *n* objetos, tal como se aprecia en la figura. El primer jugador puede eliminar el número de objetos que quiera siempre que estos sean de una misma fila; lo mismo puede hacer el segundo jugador. Pierde el juego aquel que elimina el último objeto.

El Ingeniero de Caminos Manuel Leirós me propuso este problema en un encuentro en la estación termal de Luso (Portugal) en el 2003; recuerda que apareció en una revista de su Escuela y cree que se publicó antes en un libro de principios del S. XX.

Para exponer la estrategia ganadora, confeccionamos el siguiente cuadro, en el que a la derecha de la columna de objetos y bajo las columnas encabezadas con las potencias de 2 escribiremos, en base de numeración 2, el número de objetos de cada fila.

	número de objetos	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	ganador
1	*					1	
2	* *				1	0	primero
3	* * *				1	1	segundo
4	* * * *			1	0	0	primero
5	* * * * *			1	0	1	primero
6	* * * * * *			1	1	0	primero
7	* * * * * * *			1	1	1	segundo
8	* * * * * * * *		1	0	0	0	primero
9	* * * * * * * * *		1	0	0	1	primero
10	* * * * * * * * * *		1	0	1	0	primero
11	* * * * * * * * * * *		1	0	1	1	segundo
12	* * * * * * * * * * * *		1	1	0	0	primero
13	* * * * * * * * * * * * *		1	1	0	1	primero
14	* * * * * * * * * * * * * *		1	1	1	0	primero
15	* * * * * * * * * * * * * * *		1	1	1	1	segundo
16	* * * * * * * * * * * * * * * *	1	0	0	0	0	primero
17	* * * * * * * * * * * * * * * * *	1	0	0	0	1	primero

Supongamos que ***k*** = 7, es decir, iniciamos el juego con 7 filas de objetos. Llamaremos **columnas con paridad** a aquellas encabezadas por las potencias de 2, que contengan un número par de unos, (en este caso de ***k*** = 7 todas las columnas tienen paridad).

La estrategia ganadora consiste en eliminar objetos de manera que las columnas encabezadas por las potencias de 2 mantengan la paridad. En efecto, si procedemos siempre así, el jugador que mantiene la paridad puede llegar a la situación de ***k*** = 3, en que se comprueba fácilmente que resulta ganador.

Un hecho importante es que si un jugador rompe la paridad, el otro puede siempre restablecerla y por consiguiente ganar.

En la última columna del cuadro, **ganador,** se indica el jugador que ganará si aplica la estrategia mencionada. Por ejemplo, si el juego se inicia con ***k*** = 12 filas, ganará el primer jugador, si se inicia con ***k*** = 11 ganará el segundo.

Aristogeronte.
Madrid, sep. 2004.

El dodo y su trágico destino

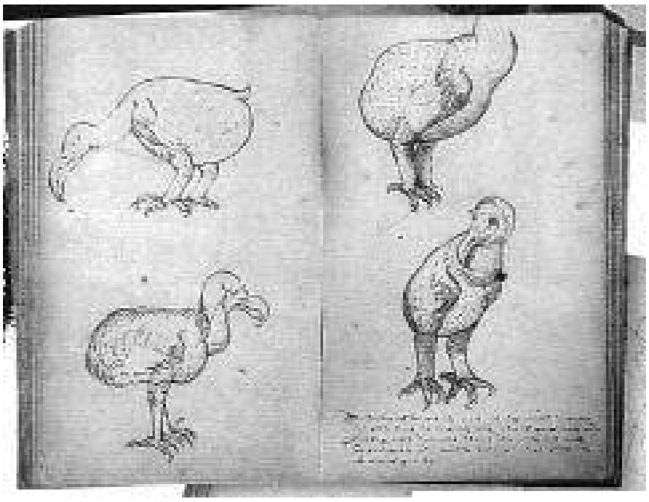
Todos los amigos de Alcia y Lewis Carroll conocen de sobras al dodo, ese grotesco pájaro que en el III capítulo de la primera *Alicia* organiza la "carrera en comité" entre los animales que han caído en el charco de lágrimas. En ella que cada cual arranca y para cuando quiere, y cuando están todos cansados, el Dodo decide que *todos* han ganado, y por tanto *todos* deben tener un premio. Cuando éstos han sido adjudicados, y dado que a Alicia no le queda más que un dedal, el Dodo lo toma y acto seguido lo tiende a nuestra heroína, diciéndole: "Os suplicamos, distinguida amiga, que aceptéis este elegante dedal". Comenta Carroll que "Alicia pensó que todo esto era bastante absurdo, pero todos parecían tomárselo tan en serio que no se atrevió a reír."

Lewis Carroll, cuyo verdadero nombre era Charles L. Dodgson, estaba aquejado de una leve tartamudeo, que le hacía vacilar al decir su nombre: "Do... Do… Dodgson", por lo que eligió como su propio símbolo al simpático bicho, bien conocido por unos restos del animal expuestos en el museo de Ciencias Naturales de Oxford, donde pueden verse todavía hoy.

¿Quién era el dodo (para algunos, dodó)? Un ave (*Raphus cucullatus*), como el avestruz incapaz de volar, y de aspecto grandote y bobalicón, tan grande o mayor que un pavo aunque emparentado con las palomas, que habitaba en la isla Mauricio, en el Océano Índico, cuando llegaron allí los primeros marinos portugueses en 1507. La isla estuvo ocupada desde 1640 de forma permanente, y unas pocas décadas después la especie había desaparecido, víctima del hombre, que encontraba en ella una reserva abundante de carne y una facilidad de caza dada por la inocencia del animal. Dice el visitante Jacob Cornelius van Neck (1601): "No encontramos habitantes humanos, más bien una gran cantidad de tórtolas y otros pájaros, que muchos de nosotros golpeamos hasta matarlos con palos y los cazamos, pues, como allí no vivía ningún hombre, no tenía miedo de nosotros, sino que se quedaban quietos, dejándonos que los golpeáramos hasta matarlos".

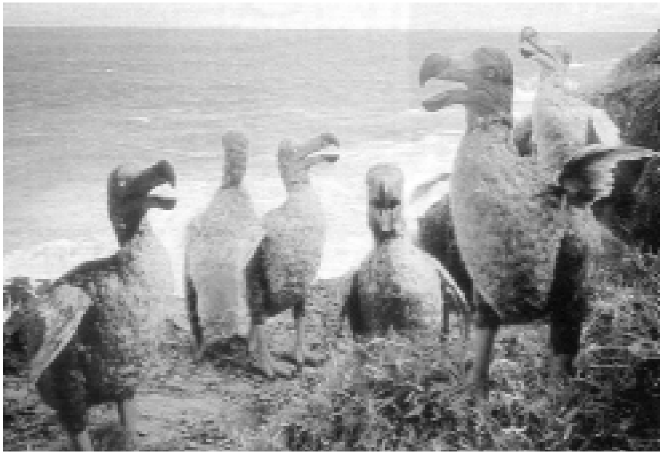
¡Pobre dodo! Sólo quedan hoy de él algunos croquis y unos restos: "una cabeza, un cráneo, una pata, el molde de una pata, varios trozos de piel y una colección de subfósiles, algunos de los cuales han sido ensamblados para formar esqueletos simulados", según dice Harri Kallio, estudioso del animal. Casi todo están en el museo citado de Oxford, que unos carrollistas entusiastas vimos en el famoso viaje "Tras las huellas de Lewis Carroll" de 1988.

El dodo se extinguió, pero no sólo víctima del hombre, pues parece que la carne del animal era bastante indigesta: "Cuanto más se los hierve, más tiesos e incomestibles se vuelven", escribía en 1598 el holandés van Neck. La bomba ecológica estalló en la isla con la aportación de otros animales conocidos, que fueron soltados para que se criaran con más libertad. Los huevos y pollitos de dodo debieron de ser un estupendo manjar para cerdos y macacos. Sir Thomas Herbert, el introductor de la palabra "dodo", dedicó al animal en 1627 un dramático epitafio: "Tienen un semblante melancólico, como si fueran sensibles a la injusticia de la naturaleza al modelar un cuerpo tan macizo destinado a ser dirigido por alas complementarias ciertamente incapaces de levantarlo del suelo".



Basándose en los dibujos de Wolfert Hermanszoon (1601-1603), en los que se basó Tenniel, el ilustrador de *Alicia*, se han reconstruido el aspecto de algunas bandas de dodos, que reproducimos en estas líneas.

Como carrollistas, dediquemos un pensamiento compasivo a esa víctima de la loca carrera actual de la extinción de especies. Quien desee hallar más detalles sobre el infeliz animal, puede consultar *El País Semanal* Nº 1467, del día 7 de noviembre de 2004, el libro del biólogo Miguel Delibes *Vida. La naturaleza en peligro*, o *El pájaro dodo y la isla Mauricio,* o *Encuentros imaginarios*, del citado fotógrafo finlandés Harri Kallio (Lunwerg).



Josep M. Albaigès i Olivart. Barcelona, nov 04

El problema de la disminución vegetativa espontánea de las poblaciones

En una población hay 1000 personas, 500 hombres y 500 mujeres. Se celebran entre ellas todos los matrimonios posibles, 500, y cada matrimonio tiene 2 hijos, con los sexos repartidos al azar con probabilidad ½. Los hijos de esta primera generación se casan entre ellos, aunque, naturalmente, el exceso de un sexo sobre el otro permanecerá soltero. Y así sucesivamente.

¿Cuántas personas formarán la población, por término medio, al cabo de 20 generaciones?

Respuesta

La primera generación no constará en general de 500 personas de cada sexo, sino de 500 + x y 500 - x respectivamente, por la lógica dispersión en el resultado. En todo caso, el número de parejas procreantes pasará a ser 500 - x, que engendrarán = 1000 – 2x hijos. El resultado es una disminución de la población. El valor x variará en cada generación, y naturalmente estará relacionado con el valor de la población total.

La complejidad del problema hace aconsejable tratarlo por el método de Monte-Carlo. Así se ha hecho para 20 generaciones, efectuando la prueba 100 veces. La población media procreante, al cabo de esas 20 generaciones, ha pasado a 563 personas, lo que supone un decremento por término medio de un 2,84 % en cada generación. En el peor de los casos, la población se ha visto reducida a 440 personas; en el mejor, a 682.

Podría conjeturarse que la tasa mínima de crecimiento en una población de 1000 personas, para evitar su disminución vegetativa, debería ser de un 3 %. Queda abierto aquí un interesante campo de investigación para poblaciones mayores.

JMAiO, Torredembarra, jul 04

DICCIONARIO HIPERETIMOLÓGICO

- **CAMARÓN**: Aparato enorme que saca fotos
- **CIRCUITO**: Lugar donde trabajan payasuitos y enanuitos
- **DECIMAL**: Pronunciar equivocadamente
- **BECERRO**: Observar una loma o colina
- **BERMUDAS**: Observar a las que no hablan
- **BERRO**: Bastor Alebán
- **BARBARISMO**: Colección exagerada de muñecas barbie
- **POLINESIA**: Mujer Policía que no se entera de nada
- **TELON**: TV panorámica de 50 pulgadas o más
- **TOTOPO**: Mamamífero ciciciego que ananda babajo tietierra.
- **ATIBORRARTE**: Desaparecerte
- **CACAREO**: Excremento del preso
- **CACHIVACHE**: Pequeño hoyo en el pavimento que esta a punto de convertirse en bache
- **CHINCHILLA**: Auchenchia de un lugar para chentarse
- **DIADEMAS**: 29 de Febrero
- **DILEMAS**: ¡Háblale más!

(Remitido por M. Dolors Hipólito)

Los puntos de Lagrange

Al estudiar el problema restringido de los tres cuerpos en mecánica celeste, Lagrange descubrió en 1772 la existencia de cinco puntos singulares de equilibrio. Por problema restringido de los tres cuerpos se entiende el que resulta de suponer que solamente dos de ellos tienen masas considerables, y que la masa del tercero (a la que llamaremos masa de prueba) es comparativamente insignificante. Actualmente sabemos que el sistema general de tres cuerpos muestra un comportamiento de caos determinista, de modo que no tiene solución definida, lo que justifica las simplificaciones efectuadas por Lagrange.

Los puntos de Lagrange corresponden a las posiciones en las que la masa de prueba se mantiene teóricamente en equilibrio (soluciones estacionarias del movimiento). La figura PL1 muestra la distribución de dichos puntos: en el plano de rotación del sistema formado por los dos cuerpos masivos, L1, L2 y L3 se hallan en la línea que une dichos cuerpos, y L4 (o punto de Lagrange avanzado) y L5 (o punto de Lagrange atrasado) están en los vértices de dos triángulos equiláteros cuya base es el segmento que une los dos cuerpos masivos citados.

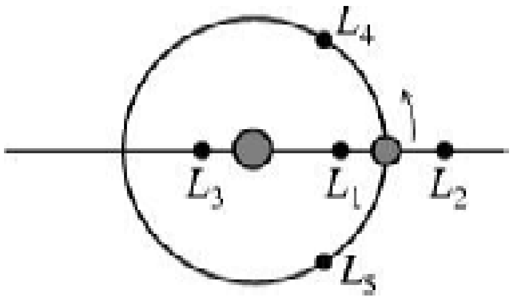


Figura PL1. Los cinco puntos de Lagrange

La estabilidad del equilibrio puede estudiarse en una primera instancia observando la distribución de la función potencial del sistema. En la figura PL2 se muestran las curvas de nivel de dicha función; las puntas de flecha triangulares señalan el sentido del gradiente, y se puede ver que los puntos L1, L2 y L3 se encuentran situados en zonas del tipo «silla de montar», de lo que se deriva que se trata de posiciones de equilibrio inestable. En el caso del sistema Sol-Tierra, por ejemplo, L1 y L2 se hallan situados a 1.5 millones de kilómetros de la Tierra, y L3 está a una distancia del Sol próxima a la que separa a la Tierra del mismo, es decir a unos 150 millones de kilómetros. El cálculo confirma que la masa de prueba se separa exponencialmente del punto de Lagrange en el que se la supone inicialmente situada. En el caso del sistema Sol -Tierra, los tiempos de latencia son de unos 23 días para L1 y L2, y de unos 150 días para el caso de L3.

Los puntos L4 y L5 se hallan en la cumbre de «montículos», por lo que se diría también que el equilibrio correspondiente ha de ser inestable. El cálculo, sin embargo, reserva la sorpresa de que ello no es así. La separación de la masa de prueba del punto inicial hace surgir una fuerza de Coriolis (una fuerza inercial; el estudio se hace suponiendo fijo el sistema en rotación formado por las dos masas principales) que obliga a dicha masa a orbitar alrededor del punto de Lagrange del que partió; para ello basta con que la relación entre las masas principales supere el valor 24.96, condición que cumplen sobradamente los sistemas Sol-Tierra, Tierra-Luna y muchos pares de cuerpos del sistema solar.

La observación astronómica confirmó por primera vez en 1906 la existencia de cuerpos orbitando puntos de Lagrange, con el descubrimiento de los asteroides troyanos (los tres grandes asteroides Agamenón, Aquiles y Héctor) que se mueven alrededor de los puntos L4 y L5 del sistema Sol-Júpiter. En tiempos recientes las sondas Voyager han hallado pequeñas lunas en el sistema Saturno-Dione (Helena, descubierto en realidad a partir de observaciones terrestres en 1980, gira en torno al punto L4) y en el sistema Saturno-Tetis (con lunas en los puntos L4 y L5).

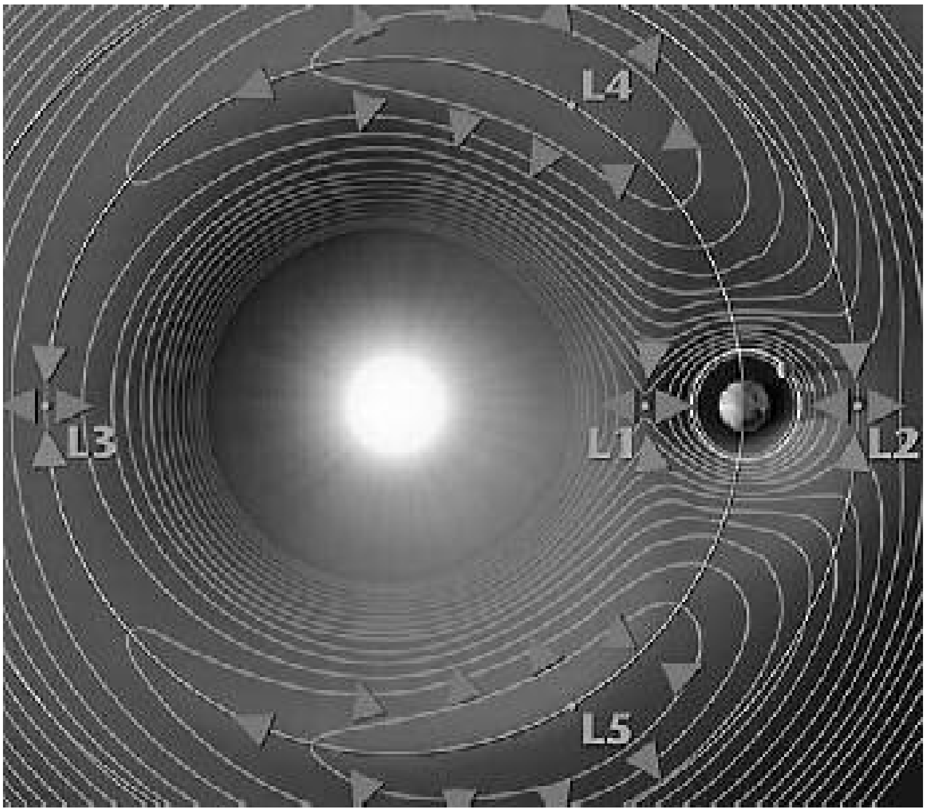


Figura PL2. Curvas de nivel del potencial con indicaciones del sentido del gradiente

La NASA ha sacado partido de los puntos de Lagrange. En el punto L1 del sistema Sol-Tierra ha aparcado al satélite SOHO (Solar Heliospheric Observatory), que observa permanentemente la misma cara del Sol que ve la Tierra. En la posición L2 se halla aparcada la sonda MAP (Microwave Anisotropy Probe) destinada a medir la radiación de microondas de fondo cósmico. Se trata de los primeros artefactos colocados en «órbitas-nimbo» en torno a puntos de Lagrange; como se ha dicho, el equilibrio que corresponde a los citados puntos es inestable, y las sondas espaciales situadas en su entorno deben activar en ocasiones sus cohetes para efectuar las correcciones pertinentes.

El punto L3 del sistema Sol-Tierra no es de interés para el aparcamiento de sondas espaciales, por hallarse permanentemente oculto por el Sol. El punto L3 de nuestro sistema solar, sin embargo, ha inspirado relatos de ficción científica. A pesar de que el equilibrio en dicho punto es inestable, Hollywood no ha tenido reparos en suponer en el mismo un oculto «planeta X» («The Man from Planet X»). A decir verdad el punto L3 no sería un mal lugar, sin embargo, como plataforma de preparación previa para una invasión alienígena a gran escala.

En cuanto a los puntos L4 y L5 del sistema Tierra-Luna, se calcula que el periodo orbital en torno a los mismos es del orden de 89 días (se tiene también en cuenta la atracción solar). Estos puntos fueron elegidos por Gerard R. O'Neill en 1969 para proponer situar en torno a ellos hábitats espaciales, que podrían servir a su vez como bases para la exploración interplanetaria.

La determinación de los puntos de Lagrange y el estudio de la estabilidad en el entorno de los mismos requiere de cálculos matemáticos relativamente extensos. No obstante, las posiciones de los puntos L1, L2 y L3 se pueden estimar fácilmente si se hace la simplificación añadida de que la segunda de las masas principales es pequeña comparada con la primera y que la excentricidad de su órbita es también muy pequeña (el sistema Sol-Tierra cumple con ambas condiciones). Entonces, para calcular el punto L2 plantearemos:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$$

y

$$G\frac{Mm'}{(R+r)^2}+G\frac{mm'}{r^2}=m'\omega^2(R+r)$$

donde *G* es la constante de gravitación universal, *M* y *m* son las masas de los cuerpos principales, *m'* es la masa de prueba, *R* es la distancia entre las masas principales, *r* es la distancia del punto L2 a la masa *m* y *ω* es la velocidad angular de rotación del sistema.

Las dos ecuaciones anteriores conducen a la siguiente:

$$\frac{\mu}{(R+r)^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{\mu}{R^3}(R+r)$$

en la que *μ* es la relación de masas *M/m*. En el caso del sistema Sol-Tierra, por ejemplo, es *μ* = 332 800 (la excentricidad de la órbita es de 1/60) y *R* = 150 × 10^6 km. Si resolvemos la ecuación de quinto grado anterior se obtiene como única solución real *r* = 1.5 × 10^6 km, valor antes citado. De modo similar se encuentran las distancias para L1 y L3.

Este resumen acerca de los puntos de Lagrange ha sido motivado por una observación de JMAiO, que comentó en una ocasión que a uno de ellos se refiere Arthur Clarke en su novela «2010: Odisea dos» (segunda de su tetralogía «Odisea espacial»). El punto de Lagrange L1, en efecto, es el lugar en el que Bowman había dejado aparcado al navío espacial «Discovery», aunque éste había terminado en una órbita apretada en torno al satélite joviano Ío (uno de los satélites descubiertos por Galileo). La frenética actividad volcánica de Ío, que arroja al espacio una ingente cantidad de azufre, ha dejado —con la ayuda probablemente del «viento solar», flujo de electrones y protones no emparejados que provienen del Sol— a la nave envuelta en una pátina de polvo amarillo. Más adelante, las naves «Discovery» y «Big Brother» se reúnen en el punto de Lagrange L1, situado, como indica Clarke, «a unos 10 500 km de Ío, en la línea invisible que conecta los centros de Ío y de Júpiter».

En el apartado de reconocimientos, Clarke agradece al Dr. Bruce Murray, que había sido director del Jet Propulsión Laboratory de Pasadena, y al Dr. Frank Jordan, de la misma institución, por haber realizado para él los cálculos de la posición del punto de Lagrange L1 del sistema Ío-Júpiter. Confiesa Clarke que, a pesar de que treinta y cuatro años antes había calculado los puntos de Lagrange colineales para el sistema Tierra-Luna, ahora no se creía capaz de resolver ecuaciones de quinto grado, ni siquiera contando con la ayuda de HAL Jr., su fiel HP 9100A.

Lo anterior lo firma Clarke en Colombo, Sri Lanka, en marzo de 1982. Ahora, recurriendo al programa *Mathematica* (como hemos hecho para el cálculo de L2 del sistema Tierra-Luna), no resulta difícil encontrar el punto interior de Lagrange para el sistema Júpiter-Ío. La ecuación

$$\frac{\mu}{(R-r)^2}-\frac{1}{r^2}=\frac{\mu}{R^3}(R-r)$$

para μ = 1.9 e^{27}/8.94 e^{22} ≈ 21 253 (relación de masas), y R= 421 600 km (distancia Júpiter-Ío) nos da la solución real r (distancia de Ío al punto L1) = 10 465 km, que coincide prácticamente con el valor indicado por Clarke.

Pedro Crespo, 2 noviembre 2004

LA MAGIA DE MOESSNER

Este trimestre John H. Conway ha dado un ciclo de conferencias en esta universidad (Northwestern). Todas las conferencias han sido de gran interés, pero la última fue especialmente interesante y repleta de resultados matemáticos intrigantes. Te cuento uno de ellos, el cual fue al parecer descubierto por Alfred Moessner en los años 50. Conway lo llama "la magia de Moessner".

Considera la sucesión de los números naturales (n):

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 ....

Elimina los números pares (2n):

1 _ 3 _ 5 _ 7 _ 9 _ 11 _ 13 _ 15 _ ....

Suma acumulativamente los números restantes:

1 _ 4 _ 9 _ 16 _ 25 _ 36 _ 49 _ 64 ...

Sin demasiada sorpresa (éste es un resultado bien conocido) obtenemos los cuadrados de los números naturales (n^2).

Supongamos sin embargo que en vez de los números pares eliminamos los múltiplos de 3:

1 2 _ 4 5 _ 7 8 _ 10 11 _ 13 14 ...

Sumamos acumulativamente:

1 3 _ 7 12 _ 19 27 _ 37 48 _ 61 75 ...

De los números obtenidos eliminamos el último de cada intervalo:

1 _ _ 7 _ _ 19 _ _ 37 _ _ 61 _ ...

Volvemos a sumar acumulativamente:

1 _ _ 8 _ _ 27 _ _ 64 _ _ 125 ...

y obtenemos los cubos de los números naturales (n^3).

Por increíble que parezca, el procedimiento funciona para cualquier sucesión de múltiplos de un número dado. Por ejemplo, para múltiplos de 4 el proceso daría las siguientes secuencias:

1 2 3 _ 5 6 7 _ 9 10 11 _ 13 14 15 _ ...

1 3 6 _ 11 17 24 _ 33 43 54 _ 67 81 69 _ ...

1 3 _ _ 11 17 _ _ 33 43 _ _ 67 81 _ _ ...

1 4 _ _ 15 32 _ _ 65 108 _ _ 175 256 _ _ ...

1 _ _ _ 15 _ _ _ 65 _ _ _ 175 _ _ _ ...
1 _ _ _ 16 _ _ _ 81 _ _ _ 256 _ _ _ ...

Como se ve, los números que quedan al final son las cuartas potencias de 1, 2, 3, 4,...

Este procedimiento, por tanto, nos permite pasar de una sucesión de la forma cn (c constante) a n^c. Pero aun hay más. El procedimiento en general transforma sumas en productos. Por ejemplo, si empezamos eliminando la sucesión 1, 3, 6, 10,..., (1+2+3+...+n), ... y aplicamos el procedimiento:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

_ 2 _ 4 5 _ 7 8 9 _ 11 12 13 14 _ ...

_ 2 _ 6 11 _ 18 26 35 _ 46 58 71 85 _ ...

_ _ _ 6 _ _ 18 26 _ _ 46 58 71 _ _ ...

_ _ _ 6 _ _ 24 50 _ _ 96 154 225 _ _ ...

_ _ _ _ _ _ 24 _ _ _ 96 154 _ _ _ ...

_ _ _ _ _ _ 24 _ _ _ 120 274 _ _ _ ...

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 120 _ _ _ _ ...

los números que van quedando al final en cada intervalo son 1, 2, 6, 120,..., es decir, n! = 1·2·3·...·n.

He probado otras combinaciones y también funciona, aunque a veces hay que acertar a escribir correctamente la sucesión original como suma de términos que dependen de n. Por ejemplo el procedimiento transforma 2n+1 = n+(n+1) en n*(n+1), el sumatorio del sumatorio de n en el productorio de n!, etc.

Conway confesó que no sabía muy bien por qué la "magia de Moessner" funciona. En realidad ni siquiera está muy claro qué es lo que hace exactamente, puesto que "transformar sumas en productos" es una descripción un tanto imprecisa. Pero sea lo que sea lo que hace, la magia de Moessner es realmente sorprendente.

Miguel A. Lerma

En un número ya antiguo de *Carrollia* me referí a los números oblongos, heteromekeis, etc., y a las sumas de potencias que resultaban de sumas de números, tan sorprendentes como la magia de Moessner (y sospecho que relacionados). Todo esto está en un libro increíble, "Aritmética teórica de los pitagóricos", de Thomas Taylor (*The Theoretic Arithmetic of the Pithagoreans*), que en España fue publicado en una de esas colecciones "esotéricas" cuando nada tiene de esotérico.

Es un libro imprescindible para el amante de las matemáticas recreativas, no se sabe si por sus inesperados resultados o por el hecho de que éstos fueran conocidos, sin saber por qué, hace 2000 años.

(Nota de JMAiO)

El tour de Trinacria

Comentando un día con un amigo mi viaje a Grecia del año pasado, me dijo lapidariamente: “Si quieres ver monumentos griegos, debes ir a Sicilia”. Y es que, en efecto, la pobre Grecia acabó arruinada por los terremotos y las invasiones posteriores, pero siempre se olvida que Sicilia, su “América”, conservó vivas las tradiciones y la forma helénica de vivir durante siglos.

Conque hacia allí nos dirigimos Pedro Crespo y yo, los mismos viajeros del año anterior, todavía no bastante saturados de bellezas griegas. Sicilia, o Trinacria (‘la de las tres puntas’) sea quizás el recodo mundial de historia más embarullada. En la Edad Antigua desempeñó el papel de la Alemania actual: fue la zona donde las dos superpotencias emergentes chocaron. Romanos y cartagineses se encontraron allí cuando se dedicaban a ampliar sus áreas de influencia, y el polvorín prendió arrastrando a la perdición a la potencia púnica. En esa lucha, las ciudades griegas tomaron el bando equivocado, y la ciudad de Siracusa, por más que la defendiera la creatividad de Arquímedes, acabó destruida con las demás.

Pero al Imperio romano sucedió el reino bárbaro de Italia, a éste una relativamente breve invasión sarracena, y tras ella, una exótica presencia normanda que dejó su huella en los estilos arquitectónicos. Después, el Imperio, tras éste los angevinos, y finalmente los españoles, que permaneceríamos allí cinco largos siglos. Ya entrados en el XIX, y tras el revulsivo napoleónico, finalmente Sicilia entró en la espiral convergente de la unidad italiana, donde sigue.

Desembarcamos en Palermo, ciudad monumental, caótica, de tráfico intenso, calles tortuosas que recuerdan las napolitanas, y mezcolanza de estilos: ahora un barroco, después un normando. En una de esas raras iglesias, una boda nos recordó, por la tristeza de la novia y el aire enfermizo del novio, esos dramas decimonónicos en los que el amor, el interés y las complejas presiones familiares coliden en dramas insólitos. ¡Qué pena que no estuviera en la iglesia Lampedusa para construir a partir de él una novela! Pero bastante hay con *El Gatopardo*, esa descripción de un recio carácter *ancien régime*, cuyas huellas perduran en los vetustos edificios de la callejas contiguas, polvorientos pero cargados de resonancias de un tiempo perdido para siempre.

Pero no tenemos tiempo de entretenernos de momento en la bella ciudad mesenia. Hay que salir, y la primera parada es Cefalù, en la costa. El nombre sugiere una cabeza, y en efecto, la ciudad se halla dormida al pie de una roca inmensa y vertical, que parece puesta en el lugar por la naturaleza como hito gigantesco de que la cultura no muere allí. ¿Qué íbamos a encontrar sino otra iglesia normanda? Calles estrechas, panorámicas vertiginosas sobre el mar… y, en un extremo de la población, la Kalura, ese lugar paradisíaco donde Bellini se inspiró para su ópera *El pirata*. ¡Caramba, en un lugar así, cualquiera! Jamás en nuestra vida habíamos disfrutado una paz similar, jamás el mar había sido tan manso, tan compañero. Casi se podía oír a las rocas crujiendo en su geológico devenir para formar el marco adecuado a esa antesala del paraíso.

Allí nos hubiéramos quedado toda la estancia, pero había que continuar. Ora por una infernal carretera reptante, ora por una inverosímil autopista abismal, llegamos a Messina. ¡Qué sensación avanzar a toda velocidad hacia el fondo de la estrecha lengua de mar! Parece que fuéramos a precipitarnos contra Escila y Caribdis. Lugar mágico, hasta en el parking del hotel, en el que tenemos que entrar rozando el techo. ¿Alguno de vosotros ha visto antes una limitación de altura de 1,65 m? Pues allí está, esperando su inclusión en el libro *Guinness* de los récords.

Al día siguiente salimos hacia Taormina. Una carretera, retorciéndose sobre sí misma para ganar inverosímiles cotas, nos conduce como una escala de Jacob hasta una población situada entre las nubes, desde la que se divisan, al fondo del abismo, un paisaje aeronáutico de playas y roquedales de una dulzura exquisita. ¡Quién fuera pájaro! Admiramos un teatro griego rehabilitado por los romanos, tomamos café en una deliciosa terraza con el premonitorio nombre de *Carpe diem*, pero nos sentimos algo agobiados por la presión turística. Todo es demasiado bonito, demasiado pulcro, demasiado escenográfico. Tiene el defecto de no tener defectos. O, mejor dicho, de ser ese pueblecito ideal con el que sueñan los capitalinos, ese escenario al que proyectan sus bien intencionados deseos de construir un pueblo "como debe ser", no como es en realidad.

Ya que estamos en las alturas, ¡quién pudiera ir al recto hacia la cima del Etna! Total, se halla tan cercano… Pero no sólo hay que bajar, sino perderse después ascendiendo de nuevo entre laberínticas poblaciones a las que les traen sin cuidado los turistas que quieren visitar la mágica montaña. De todos modos, una pista nos guía: las cordadas de lava, los conos volcánicos, los montones de bombas de lava, todos van aumentando su presencia a medida que ascendemos.

La cumbre es el lugar más mágico de la Tierra. ¿O estamos en la Luna? A 2000 m de altitud, Pedro es capaz todavía de subir a pie por la falda de un cono; yo me limito a mirar su progresión, cada vez más difícil, hacia la alejada cumbre. Todos están allí en mágica espera, quizá con el secreto deseo de que algún minicráter entre en erupción en ese momento. Como esa turista que hubiera muerto a gusto con tal de ser enterrada en el Taj Mahal, ¿no sería un buen momento para emular a Empédocles de Agrigento y saltar al interior, ganando una eternidad de futura admiración a cambio de unos pocos años de vida tirados a la caldera del volcán?

Pero el instinto de conservación se impone, y bajamos por donde hemos subido. Los oídos zumban de nuevo, pero conseguimos pasar casi de largo por una anodina Catania y alcanzar Siracusa, la Siracusa de Arquímedes. No deja se ser una ironía que en la patria del más famoso ingeniero que vieran los siglos no funcionen las puertas electrónicas del hotel, y que tengamos que entretener nuestra espera visitando de noche la península Ortigia, a la que antes se reducía la ciudad. Otra ironía es que tengamos que pagar nuestro tributo a un estafador taxista, que nos hace pensar en el implacable romano que atravesó con su espada a Arquímedes. Decididamente, el pueblo llano permanece bastante indiferente a la aventura intelectual de esos sabios (Arquímedes, no Pedro y yo, pobres de nosotros) en cuyo discurrir se funda su propio bienestar.

Pero la visita a la Siracusa antigua colma todas nuestras esperanzas. Una arquitecta con la que tenemos la suerte de topar convierte gracias a sus explicaciones nuestro tiempo inolvidable entre el calor tórrido del circo griego, de la cantera de la que emerge el puntiagudo hito que recuerde a los siglos el humilde hoyo de donde salió todo el material pétreo con el que se edificó la ciudad.

El teatro griego de Siracusa cumple con una constante estética: no era el teatro un mero lugar para la asistencia a una escenificación, sino un sedante estético para el espíritu. La vista de los espectadores se pierde, por encima del escenario, en el paisaje marino infinito. Tememos que todo esté ya descubierto en el arte de solazar los espíritus, y que la contemplación no debe quedar limitada, como se hace hoy, al diminuto rectángulo en que termina la sala por un extremo, sino que éste debe ser sólo el subrayado de una panorámica mayor, más ambiciosa, más colosal. Sin duda, un espectador griego sentía, sentado en esa platea, unas sensaciones de las que nos hallamos muy lejos hoy en los teatros cerrados, incluso en los abiertos si responden a los esquemas que más tarde introducirían los romanos, cerrando la panorámica con estatuas y

decorados, que lo convertían en un lugar exclusivamente humano, limitando su grandiosidad y cortando su conexión con el infinito.

¡Qué decepción! Parece que nadie se acuerde de Arquímedes. Una extraña Sociedad Arquimediana, cuyas puertas permanecen hostilmente cerradas, algún escaso libro en las librerías, y una reproducción, en una plaza casi imposible de encontrar, del *Stomachion* de Arquímedes, esa especie de tangram, cubierto de *graffiti*. Arquímedes, merecías algo más.

Bueno, hay que seguir. Noto es una extraña población, que un providencial terremoto obligó a reconstruir en una insólita planta cuadrada. Se halla cubierta de templos barrocos… pero con el principal de ellos, el Duomo, cerrado por obras. Menos mal que un monumental poster nos enseña cómo es lo que éste cubre. Bueno, volveremos otro año a verlo.

Y por fin empezamos con la Sicilia helénica. Al sur de la isla se halla el Valle de los

Templos, una monumental avenida al borde de un fuerte escarpe sembrada linealmente de monumentos en un muy aceptable estado de conservación. Pese al intenso calor, la vista se pierde entre las impecables columnas dóricas, y el feraz paisaje del valle, entrevisto desde lo alto a través de los intercolumnios, permite comprender por qué los griegos se establecieron allí con tantas ganas.

Al lado se halla Agrigento, la antigua Akragas, ciudad del citado Empédocles, ese genial intuitivo en postular la inmortalidad de la materia y el amor y odio como fuerzas configuradoras de la dinámica del universo. Hoy no es más que una ruina celosamente guardada, ante la que los turistas pasan de largo, pero el nombre de su sabio persiste en el puerto de la ciudad.

Todavía nos dará tiempo de visitar Seliniunte y su precioso templo, también dórico (en realidad, todos lo son), aunque, ¡ay!, sus columnas están reconstruidas, por cierto de forma bastante chapucera, pues los hierros de las armaduras asoman entre los pelados listeles de cemento. Sin duda alguna subvención tuvo lugar hace mucho tiempo, pero careció de continuidad. Bueno, mejor verlo algo en la distancia. La puesta de sol es una gloria helénica, uno de esos momentos que se desearían eternos.

Todavía nos dará tiempo de ir a dormir a San Vito lo Capo, la única playa verdaderamente decente que puede hallarse en Sicilia, y, no sorprendentemente, un lugar tomado por los turistas y los hoteles. Por una vez dejamos de tener problemas en la restauración y el descanso de nuestros cuerpos, y las fuerzas recobradas nos permitan recorrer al día siguiente el Parque Natural de la zona, un lugar de belleza agreste, agotador pero magnífico. Numerosas parejas hacen su acampada entre las pitas y los lagartos, aprovechando las coquetas calas para su descanso. Pero nosotros debemos seguir.

Pues en efecto, para la tarde tenemos fijado otro objetivo: el templo y el teatro de Segesta, digno culmen de la visita. Es el templo más majestuoso de todos, y es el teatro mejor logrado. La visión del primero desde el segundo nos hace añorar aquellos tiempos en que los hombres se comunicaban directamente con los dioses.

Noche en Palermo: ha concluido la vuelta a la isla, aunque no su visita. Queda, por ejemplo, Bagheria (Baguería, en la pronunciación local), en lo alto de otra fuerte altura, aunque prácticamente un barrio de Palermo. Un sorprendente claustro en su catedral guarda las huellas de una compañía de soldados estadounidenses acampados allí en la II Guerra Mundial, que se llevaron a Oklahoma, Alabama y otros lugares ávidos de arte todas las miniaturas con que estaban engarzadas las columnas. Bueno, es la guerra; quizás algún día las reconstruirán.

Por la tarde, visitamos la Villa Palagonia (o sea Palagonía) y su extraña decoración estatuaria, obra de un loco, de un excéntrico o simplemente de alguien deseoso de notoriedad. Ya en su día motivó la sorpresa de Goethe, tan burgués y educado él. Pero, desaparecido el sabio alemán, allí siguen las extrañas figuras, desafiando a la interpretación de los que las contemplan. También nosotros lo intentamos, como tantos otros antes, sin conseguirlo. Temo que guardan su secreto para siempre.

Justo el tiempo para ver de cerca, en Palermo, la fuente de la Piazza Pretoria que maravillara, esta vez, positivamente, a Goethe. Inmensa, de modo que hace diminuta una plaza en realidad importante, sus esculturas en mármol de diversos colores, especialmente de sus figuras animales, revelan la habilidad del artista. El polo opuesto de Palagonia. ¿Serán los símbolos del cielo y del infierno? Ambos se hallan presentes en la hermosa isla mediterránea.

Josep Maria Albaigès, octubre 2004

Dos trascendentes conjeturas, próximos teoremas

La conjetura de Poincaré

En C-67 Miguel Ángel Lerma exponía los siete problemas que el Instituto Clay presentó el año 2000 como retos matemáticos para el siglo XXI, para cada uno de los cuales dicha entidad ofrecía un millón de dólares como premio. Entre tales problemas figura un aserto establecido como hipótesis hace cien años por Henri Poincaré. Repetimos aquí la descripción de M. A. Lerma:

«Imaginemos que consideramos equivalentes dos objetos cuando es posible deformar continuamente (sin pegar ni cortar) uno de ellos hasta formar el otro. Por ejemplo un balón de rugby será equivalente a un balón de fútbol, y una taza con un asa es equivalente a una rosquilla. Sin embargo una rosquilla no es equivalente a un balón, la rosquilla no se puede deformar continuamente hasta formar un balón, porque la rosquilla tiene un agujero y necesitamos cortarlo para hacerlo desaparecer.

En este sentido una superficie esférica se puede caracterizar como una superficie cerrada sobre sí misma y sin agujeros. La conjetura de Poincaré dice que no es posible establecer una caracterización similar para hipersuperficies esféricas de dimensiones superiores. Dicha conjetura ha sido demostrada para todas las dimensiones mayores que 3 (y por supuesto para dimensiones 1 y 2), pero continúa abierta en dimensión 3.»

Si usted, lector, no es topólogo, no espere comprender del todo este asunto. Los topólogos son unas personas singulares, tanto que se dice de ellos que en su abstracción son incapaces de distinguir si lo que le ofrecemos es una taza de té o un dónut. Aclaremos que la esfera de 3 dimensiones a la que alude la conjetura de Poincaré no es nuestra familiar esfera, pues nuestras habituales esferas son variedades topológicas bidimensionales: basta con dos valores numéricos, latitud y longitud por ejemplo, para determinar la posición de un punto en la misma. Las variedades esféricas tridimensionales son hipersuperficies en un espacio de 4 dimensiones, en el cual podemos decir que se tiene una 4-bola cuya frontera es una 3-esfera. La conjetura de Poincaré, de hecho el creador de la topología algebraica, viene a decir que la 3-esfera es la única 3-variedad compacta de tipo simple, y si tiene tanta importancia es porque su demostración es crítica para la clasificación completa de las 3-variedades posibles (geometrización de W. P. Thurston).

Pues bien, los especialistas están de acuerdo en que el matemático ruso Grigori Perelman ha conseguido demostrar la conjetura de Poincaré, a la vez que completar el programa de catalogación de las configuraciones posibles de un espacio tridimensional (la componente espacial de nuestro espacio físico, por cierto). Perelman publicó en noviembre de 2002 un artículo sobre este asunto en un servidor especializado de la red. En marzo de 2003 presentó un segundo artículo, y de abril a mayo de ese año visitó Estados Unidos exponiendo sus resultados. Éstos han de publicarse y pasar la criba de dos años de examen para aspirar al premio Clay, pero son muchos los que dan por hecho que pasarán el escrutinio de los correspondientes ‘referees’.

La conjetura de Pérez Parra

Esta conjetura, expuesta hace más de treinta años por J. S. Pérez Parra, afirma que el número máximo manejable sin ambigüedades en el cálculo es un valor cercano a mil (el «milientas», tal como fue bautizado por su autor). Nos apresuramos a aclarar que no se trata de una afirmación estrictamente matemática: su ámbito de aplicación está en la práctica del manejo eficaz de los conjuntos compuestos por elementos materiales. Se trata de un aserto que pertenece más al mundo de la biología que al de la matemática, aunque la demostración se ha conseguido finalmente a través del razonamiento matemático. Diremos que esta conjetura viene a recordar el principio de indeterminación de Heisenberg de la física, ya que el límite establecido por Pérez Parra es de tipo estadístico, y posee por tanto una característica experimental de «borrosidad». De hecho, la demostración de la conjetura prueba que se trata del extremo correspondiente a 2 σ (la desviación tipo) de una distribución gaussiana.

Aunque ignorada durante mucho tiempo, probablemente por la escasa atención que merecen las publicaciones españolas más allá de nuestras fronteras, la referida conjetura atrajo a finales del siglo pasado la atención del equipo científico del departamento de biología matemática del Instituto Fraunhofer de la universidad alemana de Erlangen (el mismo que desarrolló en 1987 el formato de archivos de sonido digitalizado mp3). Estos científicos han demostrado la conjetura de Pérez Parra apoyándose como lema en uno de los corolarios de la teoría de autómatas celulares de von Neuman, según el cual «*un autómata celular (en particular cualquier ser viviente) tiene una capacidad límite para la operativa eficaz de conjuntos de elementos materiales cifrada en* 2^L*, siendo L el número intrínseco de grados de libertad del material genético (en sentido amplio) del autómata*.»

Por operativa eficaz se entiende el límite alrededor del cual se concentran en la práctica los errores experimentales en el manejo real de los conjuntos materiales. Se trata como hemos dicho de un concepto estadístico. En cuanto al número intrínseco de grados de libertad de un ser humano considerado desde el punto de vista de la teoría de autómatas, tenemos los 4 elementos básicos del genoma (adenina, timina, guanina y citosina), que han de ser multiplicados por 3 para dar cuenta de las diversas simetrías espaciales posibles (en la demostración intervienen los grupos abelianos conmutativos), de lo que resulta L = 12. Así pues, el durante tanto tiempo mítico milientas ha resultado ser igual a 1024, muy cercano al valor en su momento conjeturado.

De ser cierta esta conjetura, no podrá subestimarse su impacto en áreas tan distantes como la microeconomía, la psicología del aprendizaje y la dinámica de grupos en sociología, por citar solamente algunos ejemplos de interés. Es más, y aquí la expectación es grande, existe una posible conexión —que va más allá de la analogía antes establecida— con el principio de indeterminación de la teoría cuántica; de prosperar la sugestiva tesis sostenida por Stephen Wolfram («*A New Kind of Science*»), el universo sería en último término un autómata celular, y el límite del principio de Heisenberg (es decir, el valor $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, donde *h* es la constante de Planck) estaría estrechamente conectado, en la escala de Planck naturalmente, con el límite milientas. Ni que decir tiene que la trascendencia de este hecho en la física sería imponderable, puesto que equivale a la demostración matemática de lo que ahora ha de aceptarse como un principio, que en definitiva es la base de toda la cuántica. Al tiempo corresponde decir la última palabra.

Digamos para terminar que, en rigor, debiéramos haber esperado al día 28 de diciembre para enviar este artículo a Carrollia, ya que esa es la fecha límite que se ha concedido para pronunciarse definitivamente el equipo de arbitraje encargado por la Sociedad Matemática Europea de revisar la demostración de la conjetura de Pérez Parra. El lector interesado podrá consultar en dicha fecha la página www.arxiv.org, en la que se publicará muy probablemente la confirmación de la misma.

Pedro Crespo, 4 noviembre 2004

NO JUEGUES, HIJO MÍO

El cálculo de probabilidades confirma la sabiduría de este consejo que tanto se prodigaba a los de mi generación. Dentro de la teoría de juegos hay dos problemas clásicos bastante relacionados: el problema de Lagrange y el del juego indefinido. Combinados, llevan a un sorprendente resultado.

Problema de Lagrange.

Si una partida se interrumpe faltando por jugar m manos al jugador A y n al jugador B, y estando sobre la mesa un monte M, ¿en qué proporción deberá ser éste repartido entre los jugadores? Las probabilidades de ganar cada mano son p y q, respectivamente.

Es de sentido común que deberá serlo en las proporciones de las probabilidades de ambos jugadores de ganar la partida. Sean las probabilidades respectivas de A y B las funciones $x(m,n)$, $y(m,n)$. Si el juego continuara y la siguiente mano fuera ganada por A, la función para B pasaría a ser $y(m-1,n)$, y si A perdiera, la misma función sería $y(m,n-1)$. Por tanto, es claro que:

$$y(m,n) = py(m-1,n) + q\, y(m,n-1)$$

Se trata de una ecuación recurrente, de la cual tenemos algunos valores particulares. Obsérvese además que en el caso particular en que A tuviera jugadas todas las manos, sería $y(0,n') = 1$, ya que habría ganado la partida, y en el caso contrario, $y(m',0) = 0$.

Lagrange dio la solución:

$$y(m+1) = p^n\left[1 + mq + \frac{m(m+1)}{2!}q^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}q^{n-1}\right]$$

Como era de esperar, los valores son en principio más favorables al jugador de mayor probabilidad y al que tenga menos partidas por jugar.

Problema de la ruina a largo plazo.

Los jugadores A y B poseen los capitales m y n y juegan hasta que uno de ellos arruina al otro.

Sea $y(n)$ la probabilidad de ruina para B cuando su capital es n.

Si B gana la siguiente partida, su probabilidad pasará a ser $y(n-1)$. Si la pierde, será $y(n+1)$. Por tanto:

$$y(n) = py(n-1)+qy(n+1)$$

Análogamente sería:

$$qy(n+1) - y(n+1) + (1-q)y(n) = 0$$

Ésta es otra ecuación en diferencias finitas, suya solución general es:

$$y(n) = C_1 + C_2\lambda n$$

donde es $\lambda = p/q$.

Se determinarán las constantes C_1 y C_2 observando que $y(0) = 1$; $y(m+n) = 0$, de donde resulta:

$$y(n) = \frac{\lambda^{m+n} - \lambda^{n}}{\lambda^{m+1} - 1}$$

Por ejemplo, si las probabilidades son iguales ($p = q = ½$), y el fondo de A es el doble que el de B, la probabilidad de que éste resulte arruinado es 2/3, y se obtiene de la fórmula anterior pasando, en este caso, al límite, pues $\lambda = 1$.

Obsérvese el interés del resultado: el hecho de que uno de los jugadores posea mayor potencia económica que el otro es por sí mismo un factor muy importante para favorecer su victoria. En algunos juegos (v. gr. el póquer) está prohibido retirarse de la mesa mientras se gana, lo que es tanto como garantizar la victoria del adversario de la misma fuerza si éste posee más solvencia.

Problema conjunto

De lo anterior resulta que siempre el jugador más rico, por su superior potencia económica, está en unas condiciones de ganar muy superiores a su probabilidad. En el caso en que un simple jugador juegue contra la poderosa banca de un casino, está condenado a la ruina a la larga: lo único que le salva es la posibilidad de retirarse a tiempo aprovechando una problemática racha favorable. De lo contrario la victoria sería siempre del casino.

En otras palabras: si antes de iniciarse la partida se diera un corte de luz y hubiera que proceder al reparto de fichas, el jugador debería entregar siempre la totalidad de las suyas al casino.

¡No juegues, hijo mío!

Josep M. Albaigès, Torredembarra, julio 2004

Los nombres propios egipcios

Hasta hace pocos años, la trascripción de los nombres propios egipcios al castellano no ha estado sujeta a ninguna norma. La forma de escribir los nombres de los faraones dependía muchas veces de cómo los escribían los franceses, los ingleses o los alemanes, sin tener en cuenta que cada lengua moderna tiene sus propias características. Como ha escrito el profesor Josep Padró, “en lo referente a la trascripción de los nombres propios egipcios al castellano la anarquía es total, debido a la falta de tradición egiptológica escrita en esta lengua y a la notoria falta de competencia en la materia de la mayor parte de traductores de obras extranjeras al castellano”.

Para evitar errores y vacilaciones en la trascripción, hemos decidido seguir el sistema del profesor Padró, nuestro más reconocido egiptólogo. Es un método coherente y sistemático que nos permite unificar la escritura de los nombres propios. La forma de algunos de estos nombres puede sorprende al principio, pero enseguida se descubren sus ventajas y su racionalidad. Por este motivo hemos optado por el mencionado sistema en *Egiptomanía*.

He aquí algunos ejemplos de nombres de faraones, escritos según ese sistema:

o Dyoser o Esnofru o Quéope o Quefrén
o Mentuhotep o Micerino o Amenemes o Amenhotep
o Tutmosis o Ajenatón o Tutankhamón o Rameses
o Setos o Psamético o Ptolomeo o Cleopatra

(Tomado de *Egiptomanía*, Planeta Agostini, enero 2001)

SOMBREROS

(Un problema de probabilidades)

Este es un clásico problema de probabilidad planteado así. En el guardarropa de un centro de congresos se recogen los sombreros de los congresistas, éstos pierden sus fichas de identificación por lo que, al término de la sesión, recogen los sombreros al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno reciba su propio sombrero? ¿Cómo evoluciona esta probabilidad cuando el número de congresistas aumenta?

Pocos intuyen que esta probabilidad es prácticamente independiente del número de congresistas con sombrero. Curiosamente está relacionada con el número *e.*

Para atacar el problema con éxito, consideremos previamente todas las permutaciones de n elementos: a_1, a_2, a_3, ... a_n, (cuyo número es n!) y llamaremos a una de ellas **permutación base.** Dada cualquier otra permutación de los mismos n elementos, llamaremos **fijos** a aquellos que coincidan en posición con los de la **base**. Por último llamaremos **completas** a aquellas permutaciones que no contengan ningún elemento **fijo**.

En el problema de los sombreros, una **completa** corresponderá a un caso en que nadie recibe su propio sombrero. Quedaría resuelto si averiguamos cual es el número de completas dada una permutación base de n elementos o sombreros.

Sea C_n el número total de completas correspondientes a una permutación base de n elementos. Es fácil ver que $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$...

Demostremos ahora la importante igualdad: $\mathbf{C_n = (n-1)\, C_{n-1} + (n-1)\, C_{n-2}}$ (1)

El primer sumando de la igualdad (1) es el número de completas de **n** elementos, que pueden obtenerse, partiendo de cada una de las completas de **n-1** elementos, por el proceso de sustituir uno de sus **n-1** elementos, a_i , por el nuevo elemento a_n , colocando el a_i como último elemento de la nueva permutación de n elementos.

Partamos ahora de una cualquiera de las completas de orden n; si intercambiamos de posición el elemento a_n y el último, podrá ocurrir que éste, en la nueva permutación obtenida, se convierta en **fijo**, lo que quiere decir que la completa de que partíamos no fue originada por el proceso descrito en el párrafo anterior sino por otro consistente en, partiendo de una permutación de orden **n-1, con un solo elemento fijo**, sustituir éste por a_n y colocar el fijo al final.

Es fácil ver que el número de permutaciones de orden n-1 con un solo elemento fijo es precisamente (n-1) C_{n-2} , que corresponde al segundo sumando de la fórmula (1), con lo que esta queda justificada.

Llamemos P_n a la probabilidad de que una permutación de orden n sea completa con respecto a la base.

$P_n = C_n/n!$; $P_1 = 0$; $P_2 = ½$

De (1), dividiendo por n! obtenemos: $P_n = \frac{n-1}{n} P_{n-1} + \frac{1}{n} P_{n-2}$;

$$n(P_n - P_{n-1}) = -(P_{n-1} - P_{n-2}) \quad (2)$$

Haciendo en (2) $P_n - P_{n-1} = V_n$, tendremos que $nV_n = -V_{n-1}$

Se ve que $V_n = 1/n!$, con signo + si n es par y – si n es impar.

Finalmente se llega para la probabilidad buscada, a la expresión:

$$\boxed{P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - .... \pm \frac{1}{n!}}$$

que tiende al valor ***1/e = 0,3678***... cuando n tiende a infinito. Ya para 7 sombreros el valor de la probabilidad se estabiliza según vemos en el siguiente cuadro, demostrando su relativa independencia del número de sombreros.

Sombreros	P
2	**0,5000**
3	**0,3333**
4	**0,3750**
5	**0,3666**
6	**0,3680**
7	**0,36785**
8	**0,36788**
9	**0,367891**
10	**0,367894**
40	**0,367879**

Aristogeronte
Madrid. Agosto 04

Cómo saber si el siglo XXI ya hizo estragos en ti

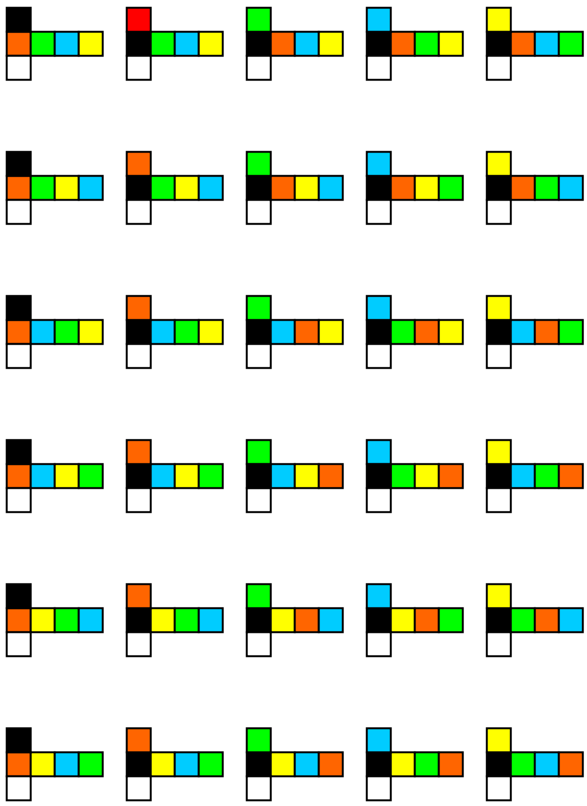
1. Intentas ingresar tu password en el microondas de la cocina.
2. No sabes que se puede jugar al solitario con cartas de verdad.
3. Tienes 15 números telefónicos para comunicarte con tu familia compuesta de 3 personas.
6. El motivo por el que pierdes contacto con tus amigos es porque ellos no tienen correo electrónico.
7. No tienes idea de cuál es el precio de un sello para un franqueo postal común.
8. Para ti estar organizado es poseer Post-it de varios colores.
9. La mayoría de los chistes que sabes te llegaron por correo electrónico.
10. Das el nombre de tu Empresa al contestar el teléfono de tu casa
11. Marcas el 0 para conseguir línea en tu casa
12. Hace 4 años que te sientas en el mismo escritorio, sin embargo has trabajado en ese tiempo para 3 empresas distintas
13. Cuando hay problemas de trasmisión en tu televisor, buscas desesperado el "ctrl alt del" de tu control remoto
14. Tus padres o hijos describen tu trabajo como "hace algo con la computadora"
15. Reconoces a tus hijos por sus fotos sobre tu escritorio
16. Leyendo esta lista has asentido todo el tiempo
17. Estás todo el tiempo pensando a quién le reenviarás este correo.
18. No te has dado cuenta de que faltan los puntos nos. 4 y 5.

Tomado de Internet por Carlos Sala

LAS 30 MANERAS DE CONSTRUIR UN DADO

Hay 30 maneras de colorear un cubo. Dicho de otro modo, los seis números de un dado pueden distribuirse en sus caras de 30 maneras distintas. Los dados usados en los casinos tienen todos la misma distribución de forma que la suma de puntos de caras opuestas siempre suman siete.

Las siguientes figuras representan las caras del cubo extendidas sobre un plano. La cara apoyada en el suelo podemos considerarla siempre de color blanco; la cara opuesta podrá ser negra (primera columna de figuras), roja (segunda columna), verde (tercera columna), azul (cuarta) o amarilla (quinta). Una vez establecidos los colores de la base y de la cara opuesta, es decir escogida una de las 5 columnas, nos restan cuatro colores que pueden distribuirse de 6 maneras diferentes. Tendremos en total 5 x 6 = 30 dados distintos.



Aristogeronte.
Madrid, marzo 2004

N. del E. Recuerdo que hace años, siguiendo la sugerencia de un artículo de Martin Gardner, coloreé para mis hijas esos 30 dados a partir de unos cubitos de madera, con los cuales se puede jugar a un "dominó espacial", hacer diversos juegos (v. gr., construir un dado de 2x2x2 de forma que sus caras reproduzcan uno determinado o sean de un mismo color, etc.).