Carrollia

No. 90, septiembre 2006

Número extra

Dirección en la web: **www.mensa.es/carrollia**

La revista **CARROLLIA**, abreviada en [**C**], es el órgano trimestral de comunicación del **CARROLLSIG** de Mensa España, que se dedica a las Matemáticas Recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, la Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Es coordinada, dirigida, editada y remitida por:

Josep M. Albaigès	**Francesc Castanyer**	**Pedro Crespo**
www.albaiges.com		**http://pedroweb.dyndns.org**

90 Compuesto: $2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Es la cuarta parte de 360, o sea que marca el número de grados de un ángulo recto.
Cabalístico es el IKIN, el pilar colocado a la derecha del templo de Salomón. 90 años tenía Sara cuando concibió a Isaac. Noventa codos tenía el nuevo Templo de Jerusalén (Eze 41,12).

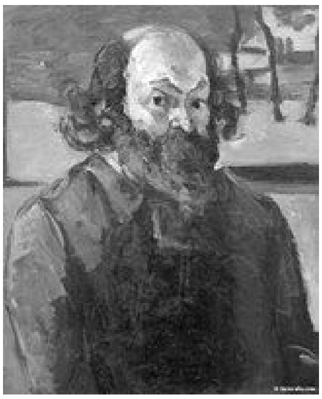
En Gematría el 90 es identificado con la hebrea *Tsade* (Ts), en griego con la antigua *copa*, hoy desaparecida, y en latín con la S (en textos modernos, la R).

En mitología griega, fueron los años que vivió Orestes hasta ser picado por una serpiente.

En loterías y juegos de azar es llamado popularmente "el abuelo", "el último" (en las que hay 90 bolas), "el más viejo", "el guarrón de la venta".

Portada: Fotografía de Francesc Castanyer, retocada en modo acuarela.

ÍNDICE



Centenario de la muerte de Paul Cézanne (Aix-en-Provence, 22 oct 1906)

Tras el largo y cálido verano

La terrible canícula ha traído malas noticias: falleció, víctima de una cruel enfermedad, Alfredo Pérez Jiménez, un fiel lector de *Carrollia*, que para el mismo número anterior había aportado diversos artículos y fotografías. Se da la coincidencia que [C-89] le llegó en la misma clínica donde se estaba tratando, y fue una de sus últimas satisfacciones leerla, según me contaron en su familia.

Descansa en paz, querido Alfredo. Echaremos siempre de menos no sólo tus colaboraciones, sino tu hombría de bien, tu generosidad y tus inteligentes comentarios.

La primera carta del verano procedió de José Antonio Echagüe, de Madrid:

Al leer el número 49 del BOFCI me han venido al recuerdo algunas pintadas realmente notables que he leído, y de las que, lamentablemente, no tomé testimonio fotográfico.

En una estación del metro de Madrid, en época de elecciones, sobre el cartel electoral de un importante partido político, en grandes caracteres negros y rojos, con la señal ácrata de las A encerradas en un círculo, pintaron:

“De ti solo quieren tu dinero y tus votos. Así que ya lo sabes: ni un duro, ni un voto”.

Otra pintada que me llamó la atención estaba dibujada sobre un gran cartel publicitario de una conocida peletería, en la que veía una elegante dama con un espectacular abrigo de pieles. Sin duda estaba realizada por personas poco amigas de utilizar las pieles de los animales (y nada amables con las mujeres que las visten, por cierto). Decía:

“Matan zorros para vestir a focas. Matan a focas para vestir a zorras”.

Por último quiero recordar una pintada que vi hace ya años, en Bilbao, en una época en que estaba en pleno debate la insumisión al servicio militar, y se había detenido a varios activistas del movimiento antimilitarista. Rezaba:

“Se puede militarizar a un civil, pero es imposible civilizar a un militar”.

Hace unos días estuve en Gran Canaria, concretamente en Telde, importante población de la isla en la que recientemente ha habido ciertos episodios de corrupción urbanística. En la entrada de una de la dependencias municipales un gran cartel indicaba:

"Departamento de Economía del Excelentísimo Ayuntamiento de Telde".

Algún ciudadano tachó con pintura blanca la palabra "Telde" y sobre ella pintó "Marbella".

Ya que estamos en plena y cálida canícula, una de piscinas. En la de mi urbanización, en una temporada pasada, alguien puso en el tablón de anuncios:

"Prohibido gastar bromas en el agua y ahogar a otros usuarios".

Evidentemente se refería a la conocida “gracia" entre gente joven y menos joven de dar las desagradables "aguadillas", pero ¡menuda broma eso de ahogar a otros bañistas!

Si no recuerdo mal, la frase sobre “civilizar a los militares” procede de Clemenceau, quien por ocurrencias como ésta fue calificado como “una calavera esculpida en un cálculo biliar”. Este verano hablé en el programa de radio sobre los números de Fibonacci y la proporción áurea, para lo cual me fue muy útil un libro monográfico sobre el tema, que José Antonio tuvo la generosidad de regalarme. Comentando esta carta, le pregunté:

¿Viste la película *El código Da Vinci*? Salen los Fibonacci. Me pareció una birria.

Y ahí está su inmediata respuesta:

En efecto, no comprendo el revuelo sobre El Código Da Vinci. El libro, y aún más la película, son, incluso como pura ficción, francamente flojitos. La cerrada oposición de la Iglesia Romana le ha hecho una publicidad inmerecida. Ya vi que aparecían los números de la sucesión de Fibonacci. A cuenta de esto creo que están apareciendo o a punto de publicarse varios libros sobre la Proporción Áurea y aspectos afines. Realmente lo único que falta en El Código da Vinci es algún extraterrestre, o la fórmula final de la cuadratura del círculo.

Otra de las siempre suculentas cartas de Pedro Crespo:

En el libro *«Lure of the Integers»* de Joe Roberts se cita, con palabras de un tal Richard Guy, la siguiente anécdota:

«Para la admisión en las escuelas británicas de enseñanza secundaria solía efectuarse un examen, llamado '11-plus'. En una ocasión una de las preguntas fue "Reste 7 de 93 tantas veces como pueda". La respuesta de uno de los examinandos fue "Obtengo 86 cada vez".»

No se dice si el muchacho fue admitido, pero mi opinión es que una reprimenda, como poco, es lo que se merecía quien propuso la pregunta. Porque ¿qué diablos pretendía como respuesta? Suponiendo que hubiera que restar 7 cada vez del resultado, ¿cuándo hay que detenerse? De haberme tocado a mí esa pregunta, y dado que a mis once años era yo un chico voluntarioso y propenso a la obediencia, hubiera terminado por entregar (y eso no antes de que sonara la campanilla) una gama de respuestas desde digamos 83 a 89 con la frecuencia mayor centrada en 86 (probablemente 86, que tampoco es cosa de presumir).

Para que veas que no me solidarizo así porque sí con el muchacho del examen te cuento que una vez, cuando estaban de moda los exámenes psicotécnicos, que así les decían, sufrí a causa de una de esas cuestiones ambiguas, y por aquel entonces ya era yo un mozo con bigote. Una de los ejercicios planteaba varias multiplicaciones con factores de varias cifras, presentadas las dichas multiplicaciones como en una disposición de tres columnas por cuatro filas, si mal no recuerdo. El encabezado decía así: «Lleve a cabo las siguientes multiplicaciones de izquierda a derecha». Y allí me tienes a mí entrando al trapo al pie de la letra, tratando de multiplicar empezando literalmente por la izquierda de cada factor, haciendo esfuerzos por imaginar las que me hubiera llevado en caso de efectuar la multiplicación al modo canónico, y corrigiendo cuando me daba cuenta de alguna incorrección. Cuando ya había pasado el ecuador del conjunto de multiplicaciones advertí de repente dos cosas: que nadie podría discernir si había realizado la multiplicación del modo preceptivo, y que seguramente lo que se me pedía era, y supongo que por si no nos daba tiempo a hacerlas todas, que empezara a realizar los productos comenzando por el de arriba a la izquierda y continuando al estilo de nuestra forma de lectura. Con lo fácil que hubiera sido numerarlas y pedir que se efectuaran en orden correlativo.

Moraleja: más responsabilidad al preguntar.

Otra carta, veraniega a más no poder, de Francisco Rosillo Donado-Mazarrón, de Valdepeñas. En ella se alude a la reciente estancia de Pedro y mía por el eclipse de marzo y por la visita a la tierra del Quijote.

Te escribo, refugiado en la biblioteca municipal, por aquello del aire acondicionado, ya que en casa no dispongo del aparatejo correspondiente.

Ayer tuvimos unas máximas muy altas y una mínima que no bajó de 25ºC.

Por contraste el pasado enero, en una nevada, llegamos a -8ºC. Como puede verse, la oscilación de temperaturas es amplísima, lo que ha llevado a los habitantes de la zona a decir aquello de "nueve meses de invierno y tres de infierno".

Ya que de refranes hablamos me han llamado la atención la cantidad de metáforas y modismos culturales, que hacen alusión al mundo de los números. Mundo siempre privilegiado para un carrollista. Cito algunos ejemplos:

- Cantar las cuarenta
- Como tres y dos son cinco
- Contar hasta diez
- Tener un siete en la ropa
- Estar más solo que la una
- Estar a dos velas
- Seguir en sus trece
- Ser más chulo que un ocho

Para no abusar del lector, únicamente haré referencia a esta última expresión, que según mis informaciones hace referencia a la época en que en la Villa y Corte había tranvías. El tranvía nº 8 iba desde Puerta del Sol hasta San Antonio de la Florida, ermita donde se celebraban y celebran aún hoy, famosas verbenas con "chulos" y "chulas", representantes de lo castizo, célebres por su forma de vestir y que lógicamente, cogían ese tranvía.

Pasando a otro orden de cosas te adjunto un artículo sobre el nacimiento de la TV en nuestro país, por si consideras procedente su publicación.

¡Ay, Paco! Este verano fuimos mi mujer y yo hasta Saarbrücken en automóvil para conocer a mi nieto. Esperábamos aprovechar para hacer un poco de turismo por Francia, pero, ¡horror!, con los termómetros marcando 39º en plena tarde, y bochornosas noches de hotel (los alemanes son tan originales que han suprimido el aire acondicionado en ellos, cosa que al parecer hay que agradecer a los Verdes, estamos avisados para cuando manden aquí), salimos pitando una vez cumplidos los trámites familiares.

Otro fiel colaborador, Mariano Nieto, de Madrid, manda otra carta con chistes y problemas. Aclaremos ante todo que la foto de la portada de [C-89] (el triángulo formado por los rastros de tres reactores en el cielo) era de Mariano; confundí la autoría con la de nuestro malogrado Alfredo Pérez por las otras fotografías aparecidas de él en el mismo número. Mis disculpas.

Y vamos con la carta:

Un problema del estilo del planteado por Pedro Crespo en el último *Carrollia* es el siguiente:

En una urna hay una bola blanca y otra negra. Se saca al azar una de ellas y se devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color.

¿Cuál es la probabilidad de que cuando la urna contenga 20 bolas haya 10 de cada color?

Un chiste matemático que me cuenta mi nieta Mónica en junio 2006:

Esto es una fiesta de funciones. Están todas bailando: log e^x ; x^3; 1/x; etc y e^x está marginada en una esquina. Se le acerca toda chula x^4 y le dice: “pero vamos, mujer, ¡intégrate!” y e^x responde toda triste “¿Para qué? Si me voy a quedar igual...”

Me he movido por el sitio “DivulgaMAT” en Internet y he encontrado el problema siguiente que me ha llamado la atención pues enlaza matemáticas con historia. Ya me dirás qué te parece.

```
Durante la guerra 1914-18 fue
descubierta una tumba de un
soldado francés muerto el último
día de un mes durante otra guerra
en Italia. La alabarda del
soldado francés se encontraba a
su lado. El producto del día del
mes inscrito en su lápida por la
longitud en pies de la alabarda,
por la mitad de los años
transcurridos entre la muerte del
soldado y el descubrimiento de su
tumba, y finalmente por la mitad
de la edad del comandante francés
de la expedición en que murió el
soldado, es igual a 451.066.

¿Cómo se llamaba el comandante
francés?
```

Gracias por la colaboración, Mariano. Bueno, publicaremos las soluciones en el próximo [C] para que nuestros lectores trabajen. Igualmente esperos sus comentarios.

Y ya al borde del cierre de la edición, llegó carta desde el otro hemisferio. Jorge Viaña es un colaborador de [C] bien conocido por sus artículos, sus preciosas remesas filatélicas (la última encabeza esta sección) y su edición de la revista *El Señor Quijote* (ESQ), que concede a [C] la satisfacción de albergarse en sus páginas, como se verá más adelante. Dice Jorge:

Con un abrazo cordial, tengo el gusto de remitirte (¡al final!) un ESQ con franqueo postal de sellos recientes (fauna argentina). Fíjate que el código es B1900WAA —más rápido para las casillas de este Correo Central…—; hablando de W, verás que el trabajo que publicaste en C#89 figura en la página www.pablosexto.edu.ar [allí verás otros, de mis colegas (incluida mi hija mayor) del Inst. de Prof. *Pablo VI*]. No sé si ya contactaron con Mossèn Ricardo.

Jorge se refiere a Ricardo Isaguirre, en España últimamente, de quien esperamos contacto en breve. Queda corregida la errata en la dirección.

En su carta Jorge nos amplía las consideraciones que hizo en el número anterior sobre los números primos. Añade, en efecto:

En C#89 (pág. 15-17) se publicó un trabajo sobre la enumeración de los números primos (que está en www.pablosexto.edu.ar) y el Cab. Don Josep Maria (JMAiO), en pág. 4, al cerrar su comentario al mismo —como siempre, amable y generoso— lo hace con la expresión: “Espero el ESQ donde se trate en profundidad el tema”. Helo pues aquí:

El método de Eratóstenes, como es sabido, consiste en tomar la sucesión de los números naturales desee el comienzo, hasta donde se desee, y aplicarle el procedimiento de conservar un número n y después ir suprimiendo todos los subsiguientes (de n en n) a partir de n^2 (que es el primero que se suprime), denominando (incorrectamente) “número primo” a cada uno de los n que permanecen sin suprimir. Pero n debe tomar todos los números naturales, y se suele omitir que la unidad (1) es parte de dicha sucesión, por lo tanto, si se hace n = 1, en un comienzo se mantiene 1 y luego se debe suprimir *todos* los subsiguientes (de 1 en 1), a partir de $n^2 = 1$ (o sea, después de conservarlo efímeramente, se termina por suprimirlo, junto con todos los subsiguientes. Conclusión: no existen los números primos.

Entonces, resumiendo, sólo quedan dos posibilidades: o no se aplica el método de Eratóstenes a la unidad (lo cual equivale a no considerarla parte de la sucesión de números naturales: lo que es absurdo) o bien aplicarla, con la consecuencia de que se irán suprimiendo (desde 1 en 1) todos los números (incluida la misma unidad), concluyendo que no hay números primos.

La solución consiste en rechazar la (falsa) definición: “números primos son aquellos que quedan sin suprimir, cuando se aplica el método de Eratóstenes a la sucesión de números naturales” y reemplazarla por la clásica: “número primo es todo aquel número natural que tiene dos, y sólo dos divisores: la unidad y él mismo”, comenzando por 2 (el único primo par) que es el primero que cumple con dicha condición…

y luego, desde 2, ya se puede aplicar el susodicho método. Distinguiendo, así, entre la definición y el método. Y, ¿la unidad? Pues queda en la categoría de no ser primo, ni tampoco compuesto (como se leyó en C#89).

Queriendo hacer otro comentario a C#89, esta vez en pág. 26: en el trabajo de Pedro Crespo, octubre 2005, en torno al “*serendipismo*” se transcribe la definición: “Dícese de la investigación científica que fracasa en la realización del plan preestablecido, pero que consigue resultados inesperados más importantes que los señalados *a priori*. Está tomada de Darío Maravall, *Diccionario de Matemática moderna*, Ed. Nacional, Madrid, 1975, página 250 (que es la edición que se tiene a la vista). El autor, Académico de número de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, a la sazón Catedrático de la Universidad Politécnica de Madrid, Darío Maravall Casesnoves.

Quien esto escribe suele emplear otra acepción: cuando un paciente se halla sufriendo una larga, dolorosa e incurable enfermedad… y muere repentinamente por otra causa, quedando solucionada su larga, dolorosa e incurable situación. Aquí cabría un brevísimo epitafio (como para incluir en otra colección de tales, en el BOFCI: “Murió por serendipismo. QEPD”.

Más adelante se preparará una nueva presentación para la Cátedra de Epitafiología, como se prometiera, si Don Josep Maria la acepta y engrosa, como sucedió en el año anterior, AD 2005.

Por ahora, no hay lugar para más y sólo resta desear que este ESQ llegue a tiempo para C#90 (y, si no, será para C#91).

Un saludo y abrazo cordial para todos, José Jorge Viaña.

PD: Con la promesa de suprimir las veinte líneas iniciales y nostalgiosas de este ESQ (dirigidas a los nuevos Carrollistas). Valeas.

* * *

Al cierre de la edición se cuela Pedro con un lamento:

Este era un sol que tenía
una flamígera corona
un rebaño de asteroides
y un anillo de planetas…

Y es que a mi edad, Josep Maria, me mueven el suelo bajo los pies. En la Unión Astronómica Internacional, reunida en Praga con ocasión de su 26 asamblea anual, han determinado que Plutón no es un planeta como los demás. Lo han calificado de *planeta enano*, con todas las connotaciones peyorativas que eso comporta. Y el responsable de la fechoría ha sido el sector duro de la UAI. Pocos días antes un grupo más tolerante, entre los que se hallaba Dava Sobel, la autora del magnífico «*Longitud*», parecía inclinarse por abrir la mano y, además de conservar a Plutón, brindar la categoría de planetas a Ceres, a Xena (UB313, descubierto en julio de 2003) e incluso al compañero-satélite de Plutón, Caronte (el centro de gravedad común no es interno a la esfera de Plutón). Pero llegaron los halcones y ya ves. Ahora para ser planeta hay que ser esférico (Plutón lo es), tener despejada las inmediaciones de su órbita (si nos ponemos bordes, la Tierra no se ha sacado a la Luna de encima) y dar vueltas alrededor de una estrella. Y no ser un satélite, lo cual ocurre cuando se está acompañado por otro cuerpo y el centro de gravedad común queda en el interior de éste. Se han confirmado tres planetas enanos: Ceres (algo poliédrico, el pobre, en el cinturón de asteroides), Plutón y Xena; a estos últimos se les echa en cara el andar mezclándose con otros cuerpos del cinturón de Kuiper, pues al parecer lo aristocrático es no juntarse con nadie. Y hay doce candidatos, tres asteroides y nueve cuerpos del cinturón de Kuiper. El resto recibirá tratamiento de *cuerpo pequeño*. Me siento tan atribulado como el actor americano Robin Williams, el cual, y tengamos en cuenta que en inglés Plutón es Pluto, se confesó encariñado con ¡el planeta de Mickey Mouse! ¿Y qué será de B612, el planeta del Pequeño Príncipe? ¿Sabías que existe realmente? Es el asteroide 46610 Bésixdouze, a partir de ahora un miserable cuerpo pequeño, a pesar de nuestro principito y de su flor caprichosa y exigente.

* * *

Y con esto, fin del papeleo por este trimestre. ¡Adelante con el resto de la revista!

El editor

Un chaval de 90 años

Corría el año 1989. La revista *Carrollia*, creada en 1984 como el órgano de *Carrollsig*, un GIE (Grupo de Interés Especial) de Mensa dedicado a las Matemáticas Recreativas y la Lingüística —luego se extendería a otros campos— iba por el número 21. Las técnicas utilizadas para su confección y difusión eran, con toda la buena voluntad, de lo más primitivo: fotocopia, encolado, ensobrado y al buzón se ha dicho. Pese al soporte incondicional que recibía —y sigue recibiendo— de sus miembros, la tarea se estaba convirtiendo en agobiante para mí, en una época en que simultaneaba la presidencia de Mensa España con mi actividad profesional al frente de una asociación de promotores de viviendas.

Parece que la Providencia se ocupa de los afanados. En estas circunstancias apareció en mi vida Francesc Castanyer. Un jubilado sonriente, optimista y con ganas de seguir proyectando su actividad y su competencia profesional sobre el mundo. Había oído hablar de la revista, y tiempo le faltó para ponerse en contacto conmigo y ofrecerme su colaboración. Semejante regalo del Destino ha sido sólo comparable al que años más tarde se repetiría con Pedro Crespo.

Francesc es un hombre de espíritu inmensamente joven, activo, cuya inteligencia y *seny* catalán se proyecta en su vivaz mirada. Ingeniero industrial, había ejercido hasta su jubilación su tarea en la empresa Bedaux, en el campo de la planificación, desarrollo de sistemas de seguridad y contactos con los clientes. Su inmensa experiencia en el campo técnico-comercial fue desde el primer momento decisiva en el nuevo rumbo que tomó *Carrollia* al ocuparse de mejorar su rupestre maquetado, su composición y sus sistema de distribución, tomando sobre sus hombros una dura tarea que se había quedado demasiado grande para una sola persona.

Pero no se limitó a esto. Aparte de sus colaboraciones, Francesc se ocupó de una tarea inédita hasta el momento en España: la confección de un fichero de libros sobre Matemáticas Recreativas, cosa posible por su inmensa cultura en ese campo, como se trasluce en su selecta biblioteca monográfica, sin duda la mejor de España. El fichero elaborado por Francesc sigue siendo uno de los máximos patrimonios del *Carrollsig*. En realidad, nuestro amigo se ocupaba de otros terrenos con igual competencia: mencionemos sólo su gran colección de juguetes y mecanismos, donada hoy al *Museu de la Joguina* en Figueres, y visita obligada para todo el que llega a esa ciudad.

Con el tiempo fueron viniendo los cambios: *Carrollia* mejoró en presentación y contenido. Los artículos y colaboraciones fueron sometidos a un proceso de coordinación, la revista fue equilibrada y se mejoró la distribución y los sistemas de contacto con los suscriptores. Con el tiempo, las mejoras reprográficas y, sobre todo, de Internet le dieron un sello de calidad que la hace hoy comparable a otras revistas más difundidas, con cuyo contenido se equipara con todo mérito. En esos 70 números de actuación de Francesc, *Carrollia* ha alcanzado totalmente la mayoría de edad.

¡Ya lo creo que es mayor de edad! Prueba de ello es haber llegado a ese número

noventa

que empieza a convertirla en una *rara avis* en el mundo de las revistas. Y mira por dónde, ese simbólico número coincide con los

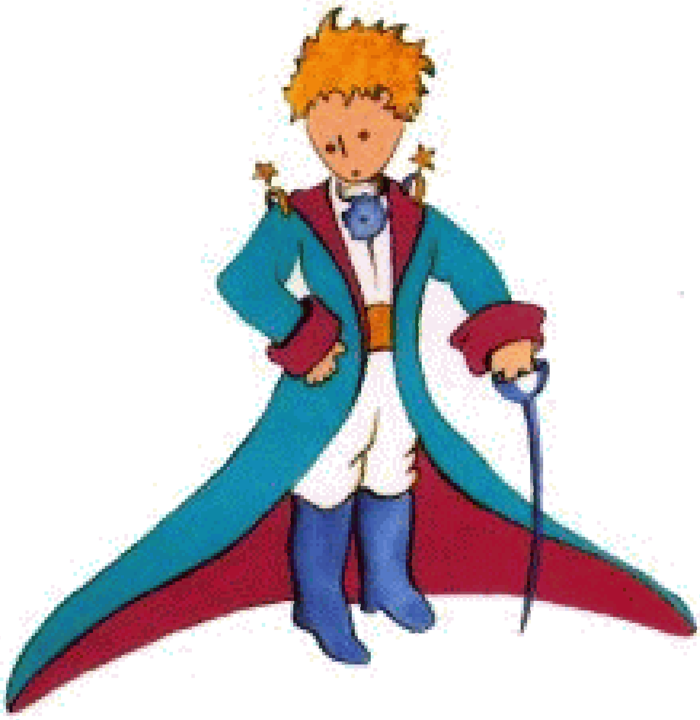
noventa

años que acaba de cumplir el joven Francesc, a quien va dedicado este número extraordinario, como lo han sido y serán todos los anteriores y siguientes.

Francesc sigue ocupándose de la revista, y sus consejos, orientaciones y selección del material continúan siendo básicos para que Carrollia siga ofreciendo a los lectores un material renovado cada día.

Estamos seguros de que este reconocimiento y homenaje que le tributamos sus amigos y colaboradores le impulsará a seguir dando lo mejor de sí mismo por la revista y por sus suscriptores. Amigo Francesc,

¡Por muchos años!



EL 90 Y LA SUMA DE CUADRADOS

$5555775777^2 + 5555115111^2 = 61725948380760496050$ (1)

90 = Suma de los dígitos de las bases del 1er miembro = Suma de los dígitos del 2º miembro.

Pero si intercambiamos el 5 por el 7 en el 1er miembro y el 5 por el 1 en el 2º miembro obtenemos el mismo resultado:

$7777557555^2 + 1111551155^2 = 61725948380760496050$ (2)

Aún más, si sumamos las bases de (1) y (2), obtenemos una suma de cuadrados que tiene la misma propiedad que las igualdades (1) y (2):

$13333333332^2 + 6666666666^2 = 222222222177777777780$

Los dígitos de las bases suman 90 = Los dígitos suman 90

OTRO

$$54863^2 + 2434^2 = 34865^2 + 42430^2 \quad (1)$$

$$94867^2 + 22436^2 = 74869^2 + 62432^2 \quad (2)$$

Si sumamos las bases miembro a miembro →

$$149730^2 + 24870^2 = 109734^2 + 104862^2 \quad (3)$$

Vemos que se cumple la igualdad de la suma de cuadrados (3) y que la suma de los dígitos de las bases de cada una de las 3 igualdades = 90.

Acebrian Julio 2006

UN PROBLEMA DE ANTONIO CEBRIÁN

Encontrar el menor número entero positivo que sea igual a la diferencia de dos cuadrados de enteros positivos y que se pueda expresar de 4 formas distintas, es decir :

$$X = a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = e^2 - f^2 = g^2 - h^2$$

Lo resuelvo así: las igualdades se pueden escribir como (a+b)(a-b) = (c+d)(c-d) = (e+f)(e-f) = (g+h)(g-h). Hay que hallar el menor número posible descomponible de cuatro maneras posibles en producto de dos factores, con la salvedad de que éstos deben ser todos impares, ya que cada par de ellos son suma y diferencia de los números buscados, y éstos, si son v. gr. (x,y), se obtendrán de la forma x = (s+d)/2; y =(s-d)/2, y esto obliga a ser pares ambos términos de los paréntesis, lo que no sería posible si s ó d (alguno de ellos) fueran pares.

Si la descomposición es $N = a^p b^q r^s$..., el número de divisores es (p+1)(q+1)(r+1)..., y el mínimo se alcanzará para 3 factores impares lo menores posibles: N = abc. Entonces el n. de d. es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, lo que corresponde a 4 parejas posibles de factores. Fácilmente se halla que el número es $3 \cdot 5 \cdot 7$ = **105**, y los productos son $1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$, lo que conduce rápidamente a los pares (53,52), (19,16), (16,13), (11,4), que cumplen la condición pedida.

JMAiO

AQUELLA PRIMIGENIA TELEVISIÓN

El artículo de Antonio García Martínez, publicado en el boletín anterior y titulado "Requiem por un compás", además de causar en mí una saludable nostalgia, me ha hecho reflexionar sobre la invasión de las NN.TT. en todos los ámbitos y muy especialmente, en lo referente al medio televisivo.

En estos tiempos de TDT y de TV por satélite, donde pronto llegará el total desarrollo de la TV interactiva, que transmutará al espectador en cliente, y donde el concepto de difusión de masas dejará paso a la difusión personalizada, no estaría de más retrotraernos a los años 50, con la inestimable ayuda del libro "La televisión contada con sencillez", de J. Pérez de Silva y P. Jiménez Hervás; Ed. Maeva, Madrid, 2002, y recordar como fueron en España aquellos primeros momentos del famoso invento del escocés Baird.

Los historiadores nos hablan de la Feria Internacional de Muestras de Barcelona de 1948. Allí, en el stand de la marca Philips se montó una emisora de TV. El estudio desde el que se efectuaron las transmisiones se hallaba situado en el Palacio Central, a unos 200 m. La experiencia fue todo un éxito.

Pero no fue hasta el 28 de octubre de 1956 cuando TVE tuvo su primer día de vida. Contaba con un radio de alcance de emisión de unos 70 kms alrededor de Madrid, y tan solo había unos 600 aparatos receptores para captar la señal emitida...

Como dato curioso, aquella primigenia TVE cerró por vacaciones entre junio y septiembre de 1957, algo inimaginable hoy día.

Los estudios de TVE, como sabemos, nacieron en el madrileño Paseo de la Habana. Allí los primeros y más populares locutores fueron Laura Valenzuela, David Cubedo, Jesús Älvarez y Blanca Álvarez. Ya con las emisiones diarias llegarían Matías Prats, Mª José Valero, Mario Cabré, Federico Gallo y un largo etcétera.

Los anuncios se hacían en directo, como los programas y eran presentados por los mismos locutores. De esta guisa Blanca Álvarez y Laura Valenzuela anunciaban lavadoras en directo...

Los padres de los "telediarios" fueron José de las Casas Acevedo y Ángel Marrero. El telediario nació el 15 de septiembre de 1957.

Uno de los profesionales más célebres fue el "hombre del tiempo", Mariano Medina era el auténtico gurú de la información meteorológica.

No habría red de corresponsales extranjeros hasta 1967, pues TVE hasta dicha fecha se servía de los corresponsales de Radio Nacional. Los primeros corresponsales de TVE serían Eduardo Sancho, Jose Luis Colina, Jesús Hermida, Federico Volpini, Ana Isabel Carro, Jose Antonio Plaza y Pedro Wender, entre otros.

Lógicamente al ser la TV un electrodoméstico de lujo, la socialización del invento vino de los ayuntamientos, concejalías, iglesias, etc, que crearon los primeros "tele-clubs".

El 1 de noviembre de 1965 nacería el segundo canal de TVE, en UHF, que apostaba por unos informativos con determinadas noticias alternativas, ligeramente alejadas de la línea oficial establecida por la Primera Cadena.

No sería hasta 1972 cuando las emisiones en color adquirieron carácter regular.

En 1983 nacieron las primeras televisiones autonómicas y en 1990 harían lo propio las cadenas privadas.

Francisco Rosillo Donado-Mazarrón, Valdepeñas, verano catódico de 2006.

La Divina Proporción

A.- Mundo Animal y Vegetal

1.- Si analizamos dentro de un panel de abejas, la *cantidad de machos y hembras* existentes, la relación entre machos y hembras cuando el número aumenta, tiende al número Φ o Divina Proporción, cuyo valor aproximadamente es 1,618.
2.- Estudiando los *moluscos cefalópodos* (en espiral), por ejemplo el nautilo, encontramos que la razón entre el diámetro de cada tramo de espiral y el siguiente, tiende a Φ.
3.- Las *pipas de girasol* crecen en sentidos opuestos. La razón entre el diámetro de cada rotación y el siguiente, tiende a Φ.
4.- Las *piñas piñoneras,* la *distribución de hojas en ramas,* las *segmentaciones de insectos,* son ejemplos de la Divina Proporción.

B.- Cuerpo Humano

Leonardo da Vinci fue el primero en demostrar la estructura divina del cuerpo humano. El cuerpo humano está formado literalmente de bloques constructivos cuya razón es Φ.
1.- La relación entre la distancia entre la parte más alta de la cabeza y el suelo y la distancia entre el ombligo y el suelo, es Φ.
2.- La relación entre la distancia entre el hombro y las puntas de los dedos y la distancia entre el codo y las puntas de los dedos, es Φ.
3.- La relación entre la distancia entre la cadera y el suelo y la distancia entre la rodilla y el suelo, es Φ.
4.- Las articulaciones de manos y de pies.
5.- Las divisiones vertebrales.

C.- Arquitectura y Música

La relación Φ aparece en Arquitectura:
1.- Partenón de Atenas
2.- Pirámides de Egipto
3.- Edificio de la Naciones Unidas de Nueva York.

Igualmente Φ aparece en la **Música**:

1.- Sonatas de Mozart
2.- V Sinfonía de Bethoven
3.- Trabajos de Bartók, Debussy, Shubert.

Se vio Stradivarius para calcular la ubicación exacta *de los oídos o efes* en la construcción de los famosos violines.

Ángel Martínez Fernández

REFRANES CULTÍSIMOS

En la zarzuela *La del manojo de rosas*, un personaje, el camarero Espasa, se hacía llamar así por hablar, según él, "como la Enciclopedia Espasa". Su documentación consistía en cursilizar determinadas frases más o menos hechas, diciendo, por ejemplo, "¡Camina la plantígrada!" por "¡Anda la osa!".

La sección de "refranes cultísimos", refleja una afición de los estudiantes de mis tiempos. Pido más. Pensando sobre todo en nuestros lectores no españoles, se aconseja facilitar, con la forma cultísima, la original.

A solípedo objeto de un obsequio no le periscopees el incisivo.	A caballo regalado no le mires el diente.
A fonemas emitidos por laringes inconscientes, trompas de Eustaquio en estado letárgico.	A palabras necias, oídos sordos.
A irreprimibles deseos de deglutir bolos alimenticios, no existe masa almidonosa panificada que ocupe elevados lugares en la escala de Mohs.	A buen hambre no hay pan duro.
A perturbación ciclónica en el seno ambiental, rostro jocundo.	Al mal tiempo, buena cara.
Al andar altrecho y lento, implicarle premura.	Al mal paso darle prisa.
Congregación de empresarios ganaderos, res ovina fenecida.	Reunión de pastores, oveja muerta.
El globo oftálmico del poseedor torna obeso el noble bruto solípedo.	El ojo del amo engorda el cabalo.
El rumiante caprino propende de forma temporalmente ilimitada al accidente orográfico.	La cabra siempre tira al monte.
H_2O que no has de ingurgitar, permítele que discurra por su cauce.	Agua que no has de beber, déjala correr.
La ausencia absoluta de percepción visual torna insensible al órgano cardíaco.	Ojos que no ven, corazón que no siente.
Las exequias con candeal son más tolerables.	Las penas con pan son menos.
No existe adversidad que por sinecura no se trueque en el devenir de las cosas.	No hay mal que por bien no venga.
No se encuentra la oquedad termogeneradora para manipulaciones reposteriles.	No está el horno para bollos.
Ocúpate de la alimentación y educación de aves córvidas, y éstas te extirparán las córneas, el iris y el cristialino.	Cría cuervos y te sacarán los ojos.
Preferible es bípedo volador en cavidad carpo-metacarpiana que 10^2 surcando las etéreas regiones.	Vale más pájaro en mano que ciento volando.
Quien a ubérrima planta arbórea aproxima su cuerpo, óptima penumbra umbrosa le entolda.	El que a buen árbol se arrima, buena sombra le cobija.
Relátame con quién deambulas y te manifestaré tu idiosincrasia.	Dime con quién andas y te diré quién eres.
Trasládeme yo a temperatura debidamente confortable, y demuestre visual y acústicamente el vulgo su regocijo.	Ande yo caliente y ríase la gente.

Recopilados por JMAiO

En torno a la conjetura de Viaña

«Cuando te dedicas a pensar en matemáticas debieras hacérmelo saber, porque mientras tú vas sumando mentalmente números primos yo te voy restando, también mentalmente, cualidades.»
Advertencia de Isabel, mi mujer, que sufre mal mis tránsitos matemáticos.

Declaro sin pudor que la teoría de números, la reina de las matemáticas como la calificara Gauss, siempre me ha parecido esquiva y desagradecida, y nunca he dejado de tener la convicción de que, si alguna vez me interesara de veras por los números primos, no tardaría en perder mujer, hijos y amigos, y que terminaría mis días vistiendo harapos y sin haber conseguido probar nada. Así que los números primos, ni verlos, me prometí a mí mismo desde muy pronto. La consecuencia es que a estas alturas carezco de número de Erdös pero a cambio puedo comprar cada mañana el periódico sin temor a sufrir la hostilidad del perro del vecino o, lo que sería peor, de su perro. Pero hete aquí que el artículo de Jorge (José A. J.) Viaña (Carrollia 89, página 15) ha conseguido pulsar alguna cuerda resonante en mi interior y me ha motivado algunas consideraciones, que ahora siguen.

Recordemos que nuestro amigo parte del cuadrado mágico formado por primos aparte del 1 (hallado por Henry Dudeney en 1917 es el cuadrado de 3 x 3 con constante mágica más pequeña, si se tolera el 1 entre los primos, cosa no rara en cuadrados mágicos):

67	1	43
13	37	61
31	73	7

y que, disconforme con la heterodoxia que implica la presencia del número 1 con pretensión de primo, plantea dos cuestiones:

1.- En primer lugar, intenta obtener otro cuadrado mágico sumando una constante (que demuestra que solamente puede terminar en 0 o en 6) a cada uno de los elementos del cuadrado original. Con la ayuda de una tabla de números primos que alcanza hasta 55.079 comprueba que ello no es posible. Invita a los lectores a proseguir el intento o a demostrar que no existe un cuadrado tal.

2.- Conjetura que A) el objetivo es imposible, y B) que ello es debido a la presencia del número 1 como elemento integrante del cuadrado.

Seguramente le gustará saber a Jorge que su conjetura es cierta (en cuanto al punto 2.A) y que admite una fácil demostración. Se observa que el resto módulo 7 de los elementos del cuadrado mágico recorre el rango completo posible: es 0 para 7, 1 para 1 y 43, 2 para 37, 3 para 31 y 73, 4 para 67, 5 para 61, y 6 para 13. En consecuencia, el resto módulo 7 de cualquier constante que se sume a los elementos del cuadrado complementará necesariamente a cero (en aritmética modular) al resto módulo 7 de alguno de los elementos originales del cuadrado, dando siempre como resultado al menos un número compuesto, que será divisible por 7. Así, por ejemplo, si la constante a sumar es 2346, al ser $2346 \equiv 1 \pmod 7$ se tendrá $2346 + 13 \equiv 0 \pmod 7$, y el elemento derivado del 13 es compuesto, al ser congruente con cero módulo 7. La conjetura (punto 2.A), queda así confirmada.

Esta circunstancia, y no la presencia del número 1 en el cuadrado (sugerencia 2.B), es la razón de que no sea posible obtener un cuadrado mágico formado por primos a partir del propuesto mediante el procedimiento de sumar una misma constante a cada uno de los elementos iniciales.

En cuanto a la resistencia de Jorge a conceder carta de ciudadanía a la unidad como número primo, nos inclinamos de su parte, pero conviene hacer un par de consideraciones:

a) Hubo un tiempo dilatado durante el cual el número 1 se contaba entre los primos sin consecuencias traumáticas; este periodo se prolongó hasta inicios del siglo XIX, siendo Henri Lebesgue uno de los últimos matemáticos insignes que consideraron la unidad número primo. Por otra parte, gran cantidad de trabajos sobre los primos no pierden su validez por el hecho de incluir al 1 entre los mismos.

b) La comunidad matemática está en general de acuerdo en que la exclusión de la unidad del campo de los primos es meramente un convenio debido a razones de comodidad, para evitar tener que establecer salvedades en muchos casos. Históricamente la razón principal se debió al teorema fundamental de la aritmética, que necesita excluir al 1 para que resulte única (con independencia del orden) la descomposición de un número en factores primos. Este convenio adquirió carácter de definición, en virtud de la cual el número 1 no es primo ni compuesto.

Pero si hemos de buscar razones más profundas que apoyen la idea de Jorge de que la unidad no es primo por alguna característica estructural, habría que atender a la evolución de la aritmética hacia esquemas formales de nivel de abstracción creciente, en cuyas formulaciones la unidad se destaca como un elemento que ocupa un lugar separado a la vez que privilegiado. En las aludidas generalizaciones se destacan clases de números llamados *unidades*[1] que son los elementos que tienen un inverso multiplicativo; sucede así con (1,-1) en los enteros y con (1,-1,i, -i) en los enteros gaussianos. En ciertos sistemas numéricos hay infinito número de unidades. Es pues la matemática moderna la que confiere un lugar separado a la unidad. En los anillos numéricos (suma, resta y producto) la clase de las unidades cobra especial importancia y emerge antes de que se pueda definir el concepto de primo. No es difícil hallar definiciones del tipo

Se definen como primos los elementos irreducibles de cualquier dominio integral. Para el caso del anillo Z de los enteros, el conjunto de los elementos primos es el de los elementos irreducibles {...−11, −7, −5, −3, −2, 2, 3, 5, 7, 11, ...}.

Esperamos que sea suficiente para conceder que en la matemática moderna la unidad ocupa un lugar aparte en relación con los primos, lo que da la razón a las consideraciones de Jorge en este sentido.

En lo que lamentamos no estar de acuerdo es con la afirmación que hace nuestro amigo acerca de que el método de la ***criba de Eratóstenes*** es el único conocido para determinar números primos. Por supuesto es un método posible, y de hecho es seguramente el más eficaz para encontrar números primos pequeños (pequeños relativamente al orden de los que se manejan en el estado actual de la disciplina), ya

[1] La literatura matemática en inglés distingue entre 'unity' y 'unit' (esta última el número uno).

que emplea solamente sumas y operaciones de cambio de estado de elementos de un vector de variables booleanas (cierto o falso, al coste de un único bit de memoria de ordenador), pero para números de treinta o más cifras resulta un sistema muy lento.

Otro algoritmo posible, por ejemplo, es el que se conoce con el nombre de ***prueba por división****,* tan simple que podría calificarse de ingenuo: consiste en dividir por 2, 3, 3 + 2 k (k = 1, 2, ...) hasta superar la raíz cuadrada del número cuyo carácter primo se comprueba, o hasta que el cociente exceda al divisor. Se gana algo probando, a partir de 3, con 6 k ± 1, (k = 1, 2, ...) porque se evitan algunas comprobaciones. Este sistema es desde luego más lento que el cribado para producir primos, pero resulta más adaptable a la comprobación del carácter primo de un número particular. Con este sistema un PC ordinario puede identificar y contar los primos hasta cien millones en cuarenta minutos; para llegar a los mil millones ya son necesarias 18 horas y media (PC AMD Sempron™ processor 3000+, 1,81 GHz.). Con este método y haciendo uso del que actualmente parece ser el lenguaje de programación más prometedor de consentirlo Microsoft, el Ruby, hemos determinado el carácter primo del número repuno de orden 19, formado por diecinueve unos, pero este número de cifras marca el límite de lo posible mediante este procedimiento.

La determinación del carácter primo de un número (lo que en inglés se conoce como *primality*) es un campo al que se ha dedicado especial atención a partir de la década de los años setenta, cuando los números primos de gran tamaño se constituyeron en piezas fundamentales para los sistemas de criptografía más avanzados. Varios de los algoritmos para la determinación del carácter primo de un número se basan en el llamado *pequeño teorema de Fermat* o en variantes del mismo. Otra clase de algoritmos para determinar primos se apoya en la teoría de las curvas elípticas, y se conoce con la sigla ***ECPP*** (*Elliptic curve primality proving*). Hasta el momento se tiene como el test de primalidad (permítasenos el anglicismo) de propósito general más rápido, con un tiempo de proceso de $O((\ln N)^4)$. El año 2004 el programa PRIMO certificó un número primo de 4.759 dígitos en unas dos mil horas de cómputo en un procesador de 1 GHz.

El 6 de agosto de 2002 Manindra Agrawal, Neeraj Kayal y Nitin Saxena, del Instituto indio de Tecnología de Kanpur, dieron a conocer un algoritmo determinista (***AKS*** *primality test*) para el que demostraron que el tiempo de resolución es una función polinómica del número de dígitos del número cuyo carácter primo se indaga, lo que garantiza que dicho tiempo no se desorbita con el aumento del número de dígitos.

Si se tiene a mano un ordenador personal con la aplicación *Mathematica* no es difícil hacerse una idea de los enormes progresos que se han realizado en los algoritmos para la determinación del carácter primo de un número. La petición

PrimeQ[31415926535897932384626433832795028841]

en la que el número planteado está formado por las 38 primeras cifras del número π, da *True* como respuesta inmediata, verificando que dicho número es primo. Pero podemos ir más allá: el repuno primo que sigue al de orden 23 tiene 317 cifras, y si nos atrevemos a plantear

PrimeQ[(10^317 - 1)/9]

de nuevo la respuesta *True* se obtiene instantáneamente (cinco centésimas de segundo).

P. Crespo, julio 2006

Usamos constantemente estas veinticinco palabras

Un estudio elaborado por Famosa con motivo del lanzamiento de su juego de aprendizaje verbal '20Q' desvela que entre los 12 y 23 primeros meses de vida, el bebé emplea 734 palabras, una cifra que aumenta hasta los 5.246 acepciones cuando tiene entre 3 y 4 años. Entre los 2 y 6 años los niños pueden aprender 10 palabras al día y el adulto una cada hora estando despierto. Te desvelamos las 30 que más usamos.

Respondemos más veces 'sí' que 'no'
Las personas tendemos a responder más veces 'sí' que 'no' para evitar el coste personal que supone contradecir a nadie. Los indecisos contestan 'a veces'.

No variamos tanto al hablar y al escribir
Las 50 palabras más frecuentes del lenguaje hablado son un 60% de las que decimos, mientras que las 50 escritas son un 45% de lo que escribimos.

Monosílabos
de, la, que, y, el, en, a, los, se, un

Verbos
ser, haber, estar, decir, poder, hacer, tener, ir, ver, dar

Sustantivos
vez, vida, años, tiempo, hombre, mundo, casa, día, mujer, parte

Estas listas han sido elaboradas según el Diccionario de Frecuentes de Alameda y Cuetos, y se ha comprobado en la RAE.

Periódico Qué, 06.04.06

De visita, no más que de visita

No había dejado de pensar en ello, una vez me asaltó la idea luego de haber leído ese detalle incluido, a modo de reseña, en un libro de divulgación. Es el caso que, al parecer, Fermat (1601 – 1665) creyó haber dado en su momento con una fórmula sencilla para generar números primos:

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

y así se lo comunicó en una carta a su compatriota el monje Marin Mersenne, con el que mantenía correspondencia frecuente. Está claro que esta expresión no cumplía el sueño de ser la fórmula madre de todos los primos, pero Fermat creía que para cualquier n el resultado F(n) es un número primo. Como todas las conjeturas, ésta tiene cierto fundamento, como podemos ver:

F(1) = 5; F(2) = 17; F(3) = 257; F(4) = 65 537;
F(5) = 4 294 967 297; F(6) = 18 446 744 073 709 551 617

Hasta F(4) son todos primos fácilmente comprobables. En cuanto a F(5) algún error debió cometer Fermat con las comprobaciones, ya que hemos de suponer que al menos debía ser costumbre entonces someter el número a la prueba de los primos menores que mil, tabulables sin esfuerzo. De haberlo hecho concienzudamente Fermat hubiera encontrado que 641 (el primo número 116) divide a F(5). El tamaño de F(6), un número de veinte cifras, quedaba ya desde luego muy por encima de las posibilidades de la época: por el método de las divisiones hace falta probar 23 974 primos, hasta dar con el factor 274 177.

Me daba mucha pena que la cosa quedara así, con nuestro sabio seducido por lo que no era sino una ilusión, y aunque me había prometido a mí mismo no volver a hacer uso de *la máquina*, la idea fue tomando cuerpo hasta convertirse en una obsesión. La había construido, y de eso hacía ya mucho, con la ayuda de Paco, al poco de haber leído ambos la novela de Wells (bueno, sí, H. G. Wells). Pero desde que mi amigo hizo aquel viaje sin regreso —se había enamorado, me dijo, y de nada valió que le tratara de convencer de que eso de los sentimientos son cosa subjetiva y para colmo relativa— ya no volví a realizar incursiones, entre otras razones porque, aunque la máquina era monoplaza, siempre compensaba comentar la experiencia. Nos habíamos juramentado para no perturbar en demasía el pasado. Desde luego nada de visitas a entornos familiares, para evitar líos con la paradoja del abuelo; y silencio absoluto acerca de inventos o hechos de trascendencia histórica. Tampoco debíamos visitar nuestro propio pasado vital, por posibles problemas con las curvas de tipo temporal cerradas de Gödel. A pesar de todo, se objetará, está el efecto mariposa. Y a eso respondo que sí, que desde luego, pero que el curso de la vida y de los acontecimientos no deja de ser una madeja de efectos mariposa, de modo que un aleteo más o menos no ha de tener importancia. *«El ruido del trueno»*, ese bello cuento de Ray Bradbury no es sino solamente eso: un cuento.

Desde lo de Paco había dejado la máquina instalada en el doble fondo de un armario del garaje, donde nadie podía sospechar nada. Seguía siendo tan tosca como cuando la fabricamos: palancas, reostatos, relés, ruedas numeradas procedentes de una calculadora mecánica robada de la oficina de un tío de mi amigo, y algún cable que otro. Hacía tiempo que no la engrasaba, por cierto. Pero estaba decidido. A través de una amiga de mi hija, que se ocupa de la coreografía y del atrezo de una pequeña compañía de teatro, me hice con un traje de francés provinciano acomodado de mediados del siglo XVII. Las coordenadas de la villa de Toulouse (estuve dudando entre esa ciudad y Beaumont-de-Lomagne) no fueron difíciles de hallar, y para el momento elegí el año de 1640 y un día del mes de mayo, que tampoco era cosa de exponerse al frío ni al calor. Para pasar inadvertido cuidé de encerrar mi ordenador portátil en una maleta de madera que casualmente guardaba como recuerdo. Y nada más, porque a fin de cuentas la máquina —tanto Paco como yo no pasábamos de ser simples aficionados— solamente era capaz de crear una burbuja espacio temporal de un día de duración y unos escasos miles de kilómetros de radio de acción.

Así que no lo pensé más y para allá que me catapulté. Aparecí en una plaza cercana al río y preguntando aquí y allá di con la morada de monsieur de Fermat. Hallé entreabierta la puerta de la casa, de modo que asomé la cabeza y ensayé un «Bonnes, a la paix de Dieu!» (Buenas, a la paz de Dios) que es como supuse que se debía presentar uno entonces[2]. De una habitación no alejada me llegó el sonido del arrastrar de una silla y al poco tenía ante mí a un hombre que frisaba los cuarenta y que me contemplaba con reserva.

—Bonjour— le dije —Moi, je viens avec l'intention de parler avec vous des nombres premiers.

El caballero no dijo nada, y me seguía mirando con cierta perplejidad.

—Excuse moi— le dije, al darme cuenta de que no me había presentado —Je m'apelle Pierre, et je viens de l'Espagne—y señalé en dirección al sur. Aunque todavía no un estado, España quedaba entonces efectivamente al sur de Francia.

Seguía la actitud de reserva. No quería entretenerlo, de modo que saqué el portátil de la maleta y lo abrí allí mismo. Como lo había dejado en modo de latencia fue cosa de poco tiempo el presentarle el cuaderno de notas de *Mathematica*. Todas las fórmulas estaban preparadas de antemano, así que una vez me cercioré de que mi visitado reconocía sus propios primos potenciales pulsé Mayúsculas-Intro tras la expresión

FactorInteger[4294967297]

y enseguida pudimos ver la respuesta {{641,1},{6700417,1}}. Para mi asombro, no hizo falta que yo explicara nada. Es listo, este puñetero, me dije para mis adentros (siempre que me veo forzado a reconocer la inteligencia de alguien no puedo evitar añadir un epíteto denigrante). Tras un instante tenso escuché un

—Parbleu! — que contenía una mezcla de estupor y de queja, a lo que siguió — Pero señor, yo hablo su lengua. Tenga la bondad de tomar asiento y esperar un momento, por favor — me pidió en un castellano fluido, sin ni siquiera esa erre gutural que yo esperaba como irremediable, a la vez que me señalaba un confortable asiento. No tardó mucho en volver. Yo le tenía reservada otra sorpresa.

—Regardez!— le dije, y volví a la carga con

FactorInteger[18446744073709551617]

[2] Reconozco que me precipité en mi traducción literal. 'Bonnes', que proviene de 'bonnes à tout faire', equivale a nuestro 'criadas', si prescindimos de posibles matices peyorativos.

para obtener inmediatamente {{274177,1},{67280421310721,1}}. Nuestro hombre, tras un instante de mal disimulado asombro, volvió a retirarse a su estudio, para volver antes de lo que yo esperaba.

—D'où venez vous? — me espetó sin más.

—Je viens du future— le dije, dejándome de tapujos.

No pareció sorprenderse, aunque permaneció un momento pensativo. Se retiró de nuevo y regresó pronto entregándome un papel en el que se hallaba escrito el número de doce dígitos 100 895 598 169. No sabía de qué se trataba, pero supuse que quería que lo procesara del mismo modo, así que escribí la instrucción

FactorInteger[100895598169]

y la respuesta fue igualmente inmediata: {{112303,1},{898423,1}}. Esta vez nuestro hombre se mostró alborozado.

Había llegado el momento de irme. Yo quería que nuestro sabio no muriera sin conocer la verdad acerca de sus pretendidos primos, pero tampoco quería cambiar el devenir natural de las cosas, así que le hice prometer que guardaría el secreto.

—Os ruego, señor, que no hagáis nada en lo que respecta a vuestros números F(5) y F(6). Las cosas han de seguir como si lo que os he mostrado no hubiera sucedido.

—No ha lugar para la preocupación. Debéis saber que por mi oficio estoy habituado a guardar secretos. Particularmente —añadió mientras me dirigía una mirada de soslayo que no supe interpretar— si se me pide explícitamente.

Como no di importancia al añadido, lo que dijo me tranquilizó. Así que me despedí con toda la cortesía que pude exhibir y que imaginé apropiada, y me retiré a un bosquecillo cercano para esperar el efecto de la implosión retráctil espontánea del seudópodo espacio temporal desplazado, cosa que tuvo lugar apenas se insinuaba la caída de la tarde.

De vuelta a casa y esa misma noche, reparé en que no había prestado atención al número que me había presentado Fermat. Como no había apagado el portátil pude rescatarlo. Allí seguía escrito en el notebook: 100895598169. Consulté mis libros hasta encontrar una referencia sobre el mismo. Resulta que se trataba de un número que el Padre Mersenne le había propuesto a modo de desafío ¡y que Fermat había factorizado!, toda una hazaña para la época (pensemos que el menor de los factores ocupa el lugar 10 650 de la secuencia de números primos). Y entonces fue cuando me di cuenta de que no le había exigido ninguna promesa acerca de la descomposición factorial de ese número. No consigo desembarazarme de la impresión de que nuestro sabio me coló un gol de campeonato. No en vano es francés el dicho «Les promesses n'engagent que ceux qui les écoutent».

¿Y cuál fue la continuación de la historia? Los libros dicen que F(5) hubo de esperar a que el inevitable Leonhard Euler lo desenmascarara en 1732. En cuanto a Fermat seis, resistió hasta que un caballero de ochenta y dos años, F. Landry, lo descompusiera en sus factores primos en el siglo XIX. La realidad, como de costumbre, es siempre más poética que la fantasía.

Post Scriptum:

En el libro «*Recreations in the Theory of Numbers*», de Albert H. Beiler (y ex–libris de Francesc Castanyer), del año 1961, se incluye una tabla con el estado del conocimiento a la fecha relativo a los números de Fermat. De F(7) se supone que ha de tener dos o tres factores, no menores que 2^32, y de F(8) se ignora por completo su naturaleza. Para números de orden superior se presenta a veces un divisor, pero en ningún caso se conocen todos los factores. Después de tanto tiempo transcurrido desde entonces, podemos añadir que:

F(7) se descompone en factores de forma casi inmediata mediante *Mathematica*:

F(7)=2^(2^7)+1=2^128+1= {{59649589127497217,1},{5704689200685129054721,1}}

Para F(8) ha sido necesario plantear la cuestión a *Mathematica* y dejar el ordenador *'pensando'* durante casi cinco horas (Timing[FactorInteger[2^256+1]]) para encontrar la respuesta:

F(8)=2^(2^8)+1=2^256+1={{1238926361552897,1},
{93461639715357977769163558199606896584051237541638188580280321,1}}

F11 = 2^(2^11)+1=2^2048+1 fue factorizado por Brent y Morain en 1988.

F(9) = 2^(2^9)+1 = 2^512 +1 fue factorizado por A.K. Lenstra, H.W. Lenstra Jr., M.S. Manasse y J.M. Pollard en 1990.

F10 = 2^(2^10)+1=2^1024+1 fue factorizado por Richard Brent, el cual encontró un factor de 40 dígitos el 20 de octubre de 1995. El cofactor es un número de 252 dígitos, lo que hubiera representado una barrera difícil de vencer de haber sido compuesto. Por suerte resultó que dicho número es también primo, lo que completó la descomposición factorial.

Hasta donde sé, todavía es una cuestión abierta la de si existe algún número de Fermat primo por encima de F(4), o si, de existir alguno, se cuentan en número finito (lo que se cree que sería lo más probable en este caso) o bien hay una infinidad de ellos.

Los números de Fermat, inocentes y pérfidos a un tiempo, representan un papel principal en la categorización que hizo Gauss de los polígonos regulares que se pueden inscribir en un círculo con la condición, impuesta por la escuela geométrica clásica griega, del uso exclusivo de la regla y el compás. Gauss logró también (un mes antes de cumplir los diecinueve años) la construcción del polígono de 17 lados. Tan orgulloso estuvo de ese logro que se cuenta que expresó el deseo de que esa figura se representara en su tumba. No se hizo así, pero en el monumento que le dedicó su ciudad natal, Braunschweig, con ocasión del centenario de su nacimiento, se grabó una estrella de diecisiete puntas; el cambio se debió al propio grabador, que opinó que el heptadecágono corría el riesgo de ser confundido fácilmente con un círculo.

P. Crespo, agosto 2006

EL EGOCENTRISMO Y LA PROPIA IDENTIDAD.
Comentarios de Manuel Icardo

Cuentan que un paciente del doctor Freud le preguntó un día quien era él, si el que era cuando tenía 18 años, el de los 35 o el de los 50 años que tenía ahora, porque no se reconocía en su forma de pensar, tan diferente, en esos tres momentos de su vida. La cosa no le pareció tan fácil a nuestro admirado científico, y después de tomarse dos días dio una contestación neutra a su paciente, que por supuesto no le satisfizo.

Es verdad que muchas personas se toman muy a pecho su identidad, que es en realidad su propio ser, su yo. Son lo que son gracias a esa interioridad personal, a su ego. No es que todos estén satisfechos de cómo son, muchos querrían ser de otra forma, más vitales, más inteligentes, tener una captación y respuesta de los sentimientos diferente, generalmente más profunda, deslumbrar a los de su alrededor. Otros por el contrario se muestran muy satisfechos de sus características intelectuales, abarcando para ellos sus sentimientos como su inteligencia, su capacidad de raciocinio y discernimiento, su particular y realista forma de ver las cosas, de saber juzgar lo que captan del entorno. Estos no se cambiarían de ninguna manera por otra persona ¡que horror dejar de ser ellos! Hasta los que nunca se han planteado "dejar de ser", por supuesto dejar de ser como son (no en el sentido existencial, como decía Unamuno en "Del sentimiento trágico de la vida", que más temía "dejar de ser" que todas las penas del infierno), se encuentran como en una balsa de aceite, quietos, tranquilos, ¡pero sabiendo que están! Ahí está lo fundamental.

Este sentimiento de la propia identidad es quizá tan fuerte en el grupo como en el individuo aislado. Se puede ser creyente o no de los dogmas y ritos de una determinada religión, pero como efecto positivo se reconoce por todos que produce un efecto cohesionador entre todos los integrantes del grupo. La identidad es buscada por el grupo más que por el propio individuo en todos los elementos que condicionan su vida, puede ser en efecto la religión, o bien su idioma, o su etnia con el color de su piel y las características intrínsecas que comporta, o la defensa de su exclusiva economía que los diferencia de otros pueblos, o sus usos y costumbres (incluida la cultura) cuanto más ancestrales mejor, o el ámbito y área geográficos (el nombre de muchos pueblos se debe a la región en que habitan o habitaban). Es el origen del rebrote de las autonomías en todo el mundo o por lo menos es la base utilizada para convencer por los que detrás de esta humana aspiración tratan de mover los intereses en su favor, intereses de poder o de dinero que van tan juntos que es prácticamente imposible separar.

Esta percepción de la identidad grupal está tan desarrollada que la historia, desde sus comienzos, escritos o no, nos habla de las luchas entre los pueblos por la persistencia de cada grupo en querer seguir siendo como es. No quiero decir evidentemente que las luchas y guerras hayan sido exclusivamente por la identidad de los pueblos. Pero sí nos debemos fijar que han sido debidas a alguno o algunos de esos factores mencionados que constituyen o contribuyen a marcar la identidad de un pueblo.

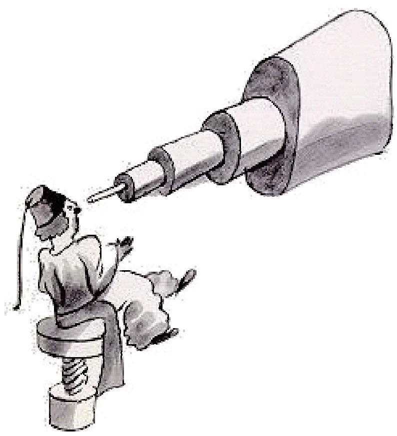
Los individuos y los pueblos, convencidos de una idea, pagados de sí mismos, tratan de convencer a otros de forma más moderada o más violenta, según su poder económico o político o potencial guerrero derivado de su desarrollo tecnológico. Y extender esas ideas les han parecido siempre que marcan su identidad. De esa forma el pueblo fanatizado por una religión intenta extenderla a su alrededor, con eso demostrará su superioridad ideológica y cultural frente a los demás. Al menos en apariencia, porque llegar a otro país (como se hizo durante la colonización de América o África) y decirles: “vuestros dioses son una mierda, los únicos y verdaderos son los nuestros”, y después esclavizarlos y llevarlos como tal a otro país, evidentemente no indica una superioridad cultural o ética.

Es frecuente imponer también los usos y costumbres, y la propia cultura, y por supuesto el idioma ¡que el esfuerzo para el mejor entendimiento lo pongan los otros! Resulta curioso que la propagación o imposición de las ideas, cultura, usos y la religión no se acompañe de los aspectos económicos o étnicos para los que someten. Eso no: nosotros estamos aquí y vosotros ahí. Si hay alguna mezcla étnica, resultan los mestizos, que aunque tienen la sangre excelsa del conquistador, que sería un factor decisorio, no se tiene en cuenta, el mestizo es un paria u hombre de segunda categoría, porque quizá se vería afectada la pureza de la identidad del grupo dominador si se incluyera al mestizo. En la historia hay pocas excepciones de verdadera integración.

La pregunta que nos podemos formular es ¿por qué esta inclinación desaforada a la propia identidad? ¿No nos damos cuenta que yo no soy quien era a los 18 o 35 años? Que puedo sentirme tan a gusto y tan seguro de mí mismo hoy que a los 18 o 35 años, excepto el físico que estará en situación algo decadente. Pero que es una argumentación más de que yo no soy el que fui, ni siquiera físicamente. Con la edad resulta demostrado que se va perdiendo la memoria próxima, otro argumento para decir que yo no soy el que fui. La pérdida de memoria la toma al menos Niestzche como un factor positivo, no exento claro está de una cierta ironía, pues aduce que el placer de aprender cosas nuevas lo volvemos a tener cuando hayamos olvidado todo lo anterior.

Se dirá con razón que me estoy olvidando de la memoria remota, la que configuró mi yo. Soy una consecuencia de mi pasado, el resultado de mis experiencias anteriores. Si reconozco a Juanita y Pepito es por mi experiencia anterior. La memoria subsiste, que es una parte de “mí” puesto que es el conjunto de sensaciones “mías” almacenadas química o eléctricamente en “mi” cerebro. Estos recuerdos conscientes o inconscientes, los puedo haber adquirido en mi juventud, pero mi consideración, mi enjuiciamiento, mi respuesta a ellos será completamente diferente a los 35 que a los 55 años.

Me debería sentir satisfecho o simplemente resignado porque no puedo cambiar nada del pasado, y en realidad soy ahora el ser único e irrepetible que soy. Eso si, yo fui muchos “uno” irrepetibles a lo largo de mi vida.



Leyes casi divinas

Ley de la Relatividad Documentada:
Nada es tan fácil como parece, ni tan difícil como lo explica el manual.

Ley de la Administración del Tiempo:
Todo lleva más tiempo que todo el tiempo que Ud. tiene disponible.

Ley de la Búsqueda Indirecta:
1) El modo más rápido de encontrar una cosa es buscar otra.
2) Usted siempre encontrará aquello que no está buscando.

Ley de la Telefonía:
1) Cuando se comunica: Si tienes bolígrafo no tienes papel. Si tienes papel, no tienes bolígrafo. Si tienes ambos, nadie contesta.
2) Cuando marcas números de teléfono equivocados nunca están ocupados.
3) Todo cuerpo sumergido en una bañera hace sonar el teléfono.

Ley de la Gravedad:
Si consigues mantener la calma mientras a tu alrededor todos están perdiendo la suya, probablemente no entiendes la gravedad de la situación.

Ley de la Experiencia:
Sólo sabe la profundidad del pozo quien cae en él.

Reglamento del Especialista:
1) Especialista es aquella persona que sabe cada vez más sobre cada vez menos.
2) Súper especialista es el que sabe absolutamente todo sobre absolutamente nada.

Ley de las Colas y Embotellamientos:
La cola de al lado siempre avanza más rápido. No ayuda cambiar de carril. La ley no se altera.

Ley de la cinta adhesiva:
Existen dos tipos de cinta adhesiva: la que no pega y la que no sale.

Ley de Atracción de las Partículas:
Toda partícula que vuela siempre encuentra un ojo abierto.

Leyes de la Vida:
1) Una persona saludable es aquella que no fue suficientemente examinada por los médicos.
2) Todo lo bueno de la vida es ilegal, inmoral o engorda
3) Si tienes tu mente demasiado abierta, se te pueden caer los sesos.
4) La edad es un precio demasiado alto a pagar por la madurez.
5) La inteligencia artificial no se iguala con la estupidez natural.
6) Si tienes que elegir entre dos males, toma aquel que nunca hayas probado.
7) Es mucho más fácil obtener perdón que permiso.
8) Para cada acción hay un programa gubernamental igual y opuesto.

9) La conciencia es aquello que te duele cuando todas las otras partes de tu cuerpo se sienten muy bien.
10) Los hombres son de la tierra. Las mujeres son de la tierra. Sobrellévalo!.
11) Ningún marido ha sido asesinado a balazos mientras lavaba los platos.
12) Una dieta balanceada es tener una galletita en cada mano.
13) La mediana edad llega cuando la amplitud de criterio y la estrechez de la cintura cambian de lugar.
14) Las oportunidades siempre se ven más grandes cuando se van que cuando vienen.
15) Cachivache es algo que guardamos durante años y que tiramos tres semanas antes de necesitarlo.
16) La experiencia es una cosa maravillosa. Te permite reconocer un error cuando vuelves a cometerlo.
17) Benditos son los que pueden reírse de sí mismos ya que nunca dejarán de divertirse.

(Remitido por Antonio Casao)

La alcoholometría y la prudencia

Muchos se han lamentado del reciente endurecimiento de la tasa de alcohol permitida en la sangre ara poder conducir. ¿Se está exagerando o realmente éstos son temas en los que toda precaución es poca?

Vamos a examinar numéricamente estas cuestiones, siguiendo el interesante libro *Cuestiones curiosas de química*, de Francisco Vinagre Arias, María Remedios Mulero y Juan Francisco Guerra. Por supuesto que las cifras que se darán son medias y aproximadas, por lo que tienen un margen de error.

Partiremos de unos hechos señalados por los autores:

- La cantidad de sangre en un adulto es, por término medio, el 8 % de su peso.
- Aproximadamente un 15 % del alcohol ingerido pasa a la sangre. El resto es eliminado antes de llegar a ella por la evaporación (a través del aliento y por la propia temperatura del cuerpo).
- Médicamente se considera una persona intoxicada cuando la tasa de alcohol sobrepasa los 3 g/l. Se entra en coma etílico con 4 g/l.

Supongamos que una persona de 70 kg de peso se toma un *dry martini* (150 g), cuyo grado alcohólico es 30 %. Con poco error, supondremos la densidad de la bebida y la de la sangre iguales a la del agua, 1000 g/l.

Cada *dry martini* contiene 150 × 30/100 = 45 g
De éstos, el pasa a la sangre el 15 %, o sea 45 × 15/100 = 6,75 g
El adulto tiene una masa sanguínea: 70 × 8/100 = 5,6 kg (o sea 5,6 litros)

Por tanto, el índice de alcoholemia será: **i = 6,75/5,6 = 1,20 g/l**

Obsérvese que tres martinis darían una concentración de 3,60 g/l, que técnicamente se considera “intoxicación”. Con las actuales tasas permitidas de alcoholometría, nuestro sujeto sobrepasa, con un solo martini, la tasa permitida. Resulta que ésta es, sobre el papel, muy rigurosa.

(¡Ojo! No se tomen estos cálculos como justificación para la bebida. Nos lavamos las manos de su utilización.).

JMAiO, Torredembarra, abr 05

La sucesión de Mariano Nieto

Mariano Nieto me presentó hace poco esta extraña sucesión. Antes de desvelar su ley de formación, invito al lector a que intente hallarla.

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
…………..

La ley es un poco chusca: La primera fila contiene **un uno**.
Por tanto, la segunda será **11**. Ésta contiene **dos unos**.
La tercera, pues, es **21**.
Como hay en ella **un dos** y **un uno**, la cuarta será **1211**.
Y así sucesivamente.

Esta sucesión plantea preguntas de tipo teórico:

- ¿Aparecerá en ella cualquier número?
- La longitud de cada término es generalmente creciente, pero ya vemos que no siempre. ¿En qué condiciones lo será?

Vamos a intentar contestarlas. Dado un término, éste constará de varios "grupos" de números iguales (v. gr., 11123311 consta de 4 grupos: 111, 2, 33 y 11. Cada grupo genera "un par" de números en el término derivado: el primero del par indica el número de unidades de que consta el grupo, el segundo, cuál es el número definidor del grupo (en el caso anterior, el término derivado sería 31122321).

Así, la primera pregunta puede contestarse fácilmente: todos los números serán siempre 1, 2 y 3. En efecto: supongamos que un grupo conste de 2 doses seguidos (22). Este grupo engendra "22". El grupo anterior no podía constar de doses, por lo que en el término derivado de dicho grupo anterior no podrá terminar en 2. El grupo siguiente podía constar de dos números, pero siempre distintos de 2 (v. gr., "11"). Por ello, el par derivado de este grupo puede iniciarse en 2, pero un solo 2.

Supongamos ahora que un grupo tenga tres unos o tres doses. En el término derivado habrá "31" ó "32" respectivamente, y por las mismas razones que antes no podrá haber tres números iguales. No hemos obtenido ningún grupo "333", ya que no es posible, pues debería proceder un grupo previo "333" seguido de "111" por ejemplo.

Por tanto, nunca un grupo podrá constar de más de tres números iguales (siempre unos o doses), y por tanto, nunca el derivado contendrá números superiores a 3.

Claro que hubiéramos podido iniciar la sucesión en un número distinto del 1, v. gr., el 4. Pero todo lo dicho sigue siendo válido, salvo que cada término terminaría en 4, como es fácil ver. No habría más cuatros en la sucesión.

La segunda no es tan fácil de contestar. Vemos que cada "grupo" engendra un par. Si todos los grupos fueran de 1 ó 2 números, la sucesión se expandiría indefinidamente. Pero cuando el grupo es de 3 ó más, el correspondiente par derivado acorta la sucesión.

Por tanto, en principio, la serie podría ser oscilante, en función de la formación de los grupos en cada término. No obstante, empíricamente se ve que es creciente. El número de términos crece. Curiosamente lo hace en progresión aproximadamente geométrica, de razón 4/3.

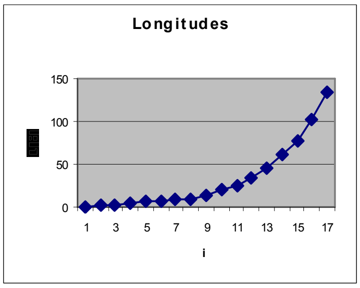
En cuanto a la distribución de unos, doses y treses en cada término, curiosamente también tienden a estabilizarse en las proporciones respectivas de 0,50/0,30/0,20.

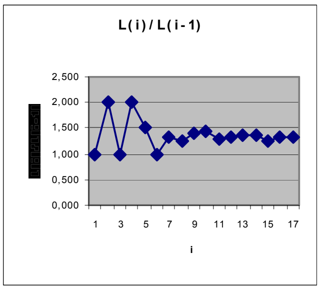
A falta de un estudio teórico completo, que aparece difícil, se ha hecho uno estadístico para el caso en que el número inicial es 1, obteniendo el siguiente cuadro:

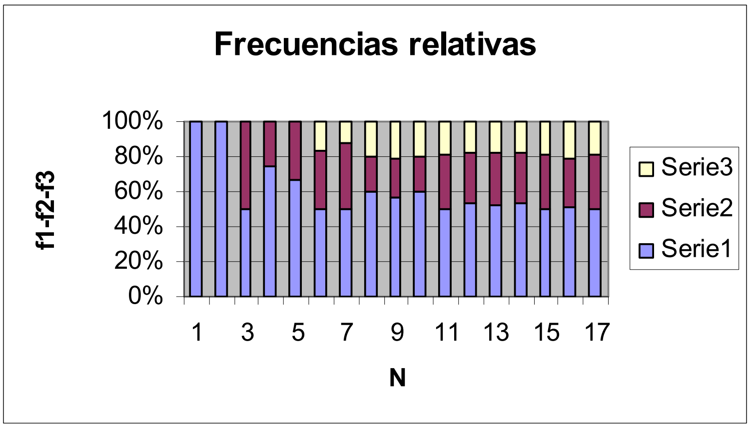
i	N(i)	L(i)	L(i)/ L(i-1)	F1	F2	F3	f1	f2	f3
1	**1**	1	1,000	1	0	0	1,000	0,000	0,000
2	**11**	2	2,000	2	0	0	1,000	0,000	0,000
3	**21**	2	1,000	1	1	0	0,500	0,500	0,000
4	**1211**	4	2,000	3	1	0	0,750	0,250	0,000
5	**111221**	6	1,500	4	2	0	0,667	0,333	0,000
6	**312211**	6	1,000	3	2	1	0,500	0,333	0,167
7	**13112221**	8	1,333	4	3	1	0,500	0,375	0,125
8	**1113213211**	10	1,250	6	2	2	0,600	0,200	0,200
9	**31131211131221**	14	1,400	8	3	3	0,571	0,214	0,214
10	**13211311123113112211**	20	1,429	12	4	4	0,600	0,200	0,200
11	**11131221133112132113212221**	26	1,300	13	8	5	0,500	0,308	0,192
12	**3113112221232112111312211312113211**	34	1,308	18	10	6	0,529	0,294	0,176
13	**1321132132111213122112311311222113111221131221**	46	1,353	24	14	8	0,522	0,304	0,174
14	**11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211**	62	1,348	33	18	11	0,532	0,290	0,177
15	**311311222113111231131112132112311321322112111312211312111322212311322113212221**	78	1,258	39	24	15	0,500	0,308	0,192
16	**132113213221133112132113311211131221121321131211132221123113112221131112311332111213211322211312113211**	102	1,308	52	28	22	0,510	0,275	0,216
17	**11131221131211132221232112111312212321123113112221121113122113111231133221121321132132211331121321231231121113122113322113111221131221**	134	1,314	67	41	26	0,500	0,306	0,194

En este cuadro se ha llamado:
i: Número de orden en la sucesión de Nieto.
N(i): Término i-ésimo.
L(i): Longitud del término i-ésimo.
L(i)/L(i-1): Cociente entre las longitudes de dos términos consecutivos.
F1,F2,F3: Frecuencias de aparición de 1, 2 y 3 en cada término.
f1,f2,f3: Frecuencias relativas.

La vista de las gráficas de los términos anteriores ayuda a comprender la sucesión.







JMAiO, nov 05

Apostillas

El propio Mariano Nieto mandó estos comentarios apropósito de la sucesión:

Es fácil ver que los grupos 1111 y 2222 no pueden darse, ni tampoco el 333, sin embargo supongo que las sucesiones de los otros grupos posibles deben estar sujetas a ciertas restricciones. De aquí se deduce que en la sucesión nunca aparecerá el número 4.

Podría estudiarse la frecuencia de aparición no sólo de las cifras 1, 2 y 3 sino también la de los grupos, por ejemplo, en tu listado el 33 aparece una vez para i = 11, otra para i = 14; tres veces para i = 16 , dos para i = 17 y ninguna para el resto.

Es curioso que **ningún** término de la serie puede empezar por **2** excepto el tercero, y llama la atención que, a partir de i = 8, se van repitiendo las cifras iniciales según el ciclo **1113**, **3113**, **1321**, habiendo cada vez mayor número de grupos iniciales coincidentes:

N(8) = **1113**213211
N(11) = **1113**1221133........
N(14) = **1113122113**121113123.....
N(17) = **1113122113121113**222.....
……………………………………………..

Todos los términos terminan en **1**; en general todos los términos terminarían con la misma cifra que el primero, si éste fuera distinto de 1. Todos los términos pares terminan en **211** y los impares en **221**, a excepción de los tres primeros.

Sumando las cifras de cada término, obtenemos una nueva sucesión ¿tendrá algún significado? Parece que no, el resultado es una sucesión creciente sin evidencia de que siga pauta alguna.

EL CIRUJANO MÁS COMPETENTE

En el libro de Y. Jurguin *Bueno, ¿y ahora qué…?* se plantea una curiosa pregunta a propósito del grado de confianza en un experimento:

—Supongamos que tiene Vd. que someterse a una operación quirúrgica, y puede elegir entre dos cirujanos. Al primero le han salido bien 90 de 100 realizadas, y al segundo 9 de 10 también realizadas. ¿Cuál elegiría Vd.?

—Bueno, sin duda al primero. A fin de cuentas, hay que valorar también la experiencia.

—Y si al primero le hubieran salido bien solamente 85, ¿continuaría Vd. prefiriéndolo al segundo?

—Bueno, no sé…

Puede ampliarse aún más la pregunta: ¿Qué porcentaje de éxitos del primer cirujano igualaría el grado de confianza que debemos prestar a ambos?

…oooOOOooo…

Planteada en términos estrictamente estadísticos, la pregunta no tiene respuesta. La probabilidad estimada de éxito para cada uno de los dos cirujanos es p = 0,9, y nada más se puede concluir a partir de aquí.

Sin embargo, existe lo que se llama "probabilidad subjetiva", que escapa a las leyes de la matemática. Mucha gente preferiría 100.000 € a la probabilidad de un 10 % de 1.000.000 de €, y ante esta preferencia subjetiva nada puede objetarse *a priori*.

Intentemos aproximarnos con un enfoque de este tipo a la cuestión de los dos cirujanos, docimando en primer lugar la fiabilidad de la conclusión de que cada uno tiene una probabilidad de éxito de 0,90. *En realidad este valor es una estimación de la probabilidad verdadera*, obtenida mediante experimentos, pero que desconocemos en cada uno de los dos casos.

Empecemos por el primer cirujano. En realidad su probabilidad de éxito es p_1, valor desconocido. Todos los valores p_1 que darían como media 90 éxitos sobre 100 ensayos, son una infinidad, pero la media de estos valores es:

$$\overline{p}_1 = 0{,}90$$

La desviación típica de estos valores de la media viene relacionada con la propia desviación típica del conjunto ensayado, que, como es sabido, vale $s = \sqrt{(pq/n)}$. Concretamente, la media de las desviaciones típicas de la media p_1 vale:

$$\overline{\sigma}_1 = \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{pq}{n}} = \frac{100}{99}\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{100}} = 0{,}03$$

Si utilizamos este valor para docimar la bondad de nuestra estimación anterior, vemos que, suponiendo una distribución normal de las distintas medias de p_1, existe una probabilidad del 68 % de que p_1 se halle en el intervalo 0,90 ± 0,03, es decir, entre 0,87 y 0,93. Podremos considerar por tanto el valor p_1 = 0,90 como bastante ajustado al real.

Apliquemos el mismo método al segundo cirujano. Ciertamente que también ahora es

$$\overline{p}_2 = 0{,}90$$

Pero en cambio la media de la desviación típica de la media es ahora:

$$\overline{\sigma}_2 = \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{pq}{n}} = \frac{10}{9}\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{10}} = 0{,}105$$

Por tanto, existe una probabilidad del 68 % de que la probabilidad del segundo cirujano se halle en el intervalo 0,90 ± 0,105. Es decir, que el intervalo que va desde 0,80 a 1,00 captura el 68 % de la probabilidad de que la probabilidad del cirujano sea 0,90.

(Nota: en el intervalo anterior se daría en caso absurdo de una probabilidad mayor que la unidad; esto es debido a que la distribución de la probabilidad es sólo aproximadamente normal. Pero el razonamiento, como orden de magnitud, es sobradamente válido.)

Es decir, que el valor real de la probabilidad podría ser superior (incluso acercarse mucho a 1), pero también bastante inferior, 0,80 o incluso menos.

En estas circunstancias, la elección viene a ser un cara o cruz. ¿Qué es preferible: un cirujano del cual sabemos, con bastante fiabilidad, que podemos morir con una probabilidad de un 10 %, u otro en que a lo mejor ésta es cercana al 0 %, pero también podría ser del 20 % o más? Nuevamente estamos ante un juego de azar, pero en esta ocasión bastante más acotado que al principio.

La segunda parte de la pregunta es de más difícil respuesta todavía, por ahondar más en la cuestión subjetiva.

Repitamos el cálculo anterior para los siguientes valores estimados de p_1. Llamaremos L_{inf}, L_{sup} a los valores inferior y superior entre los cuales existe una probabilidad del 68 % de que se encuentre p_1.

p	s_1	L_{inf}	L_{sup}
0,80	0,04	0,76	0,84
0,82	0,04	0,78	0,86
0,84	0,04	0,80	0,88
0,86	0,04	0,82	0,90
0,88	0,03	0,85	0,91
0,90	0,03	0,87	0,93

Obsérvese que, frente al amplio intervalo que capturaba el 68 % de probabilidad en el segundo cirujano, los intervalos son aquí más estrechos, pero circunscritos a unos valores más reducidos. Por ejemplo, para $p_1 = 0{,}84$, el límite inferior vale 0,80, casi igual al del segundo cirujano, pero el superior es sólo de 0,88. Seguro que el primer cirujano no es tan excepcional como a lo mejor podía llegar a ser el segundo.

La elección es puramente una cuestión de gustos del paciente.

Josep M. Albaigès
Barcelona, dic 04

La taquillera chiflada. Un problema de colisiones.

Esto érase que se era un mini cine de veinte butacas de aforo, más que suficientes porque el dueño alardeaba de exhibir solamente películas profundas, de esas que dan que pensar y además son antiguas (*El séptimo sello*, por ejemplo, que a mí me gustó mucho cuando la vi por primera vez, porque en mi época cuando no entendías nada es que la película era muy buena). Además, y puesto que la sala tenía ínfulas de importante, las sesiones eran siempre numeradas. Y por si no fuera poco disuasorio ya de por sí el asunto, en una de esas la taquillera sufrió un rapto de locura pasajera. No se preocupe el lector, que ya está repuesta, que todo fue culpa de una traición amorosa, una de esas cosas que tienen cura con el tiempo. Pero a lo que íbamos. El aciago día al que hace referencia el relato, acudió a la taquilla un grupo de seis amigos, que la gente no va sola a ver arte y ensayo, porque así luego se pasa la tarde comentando y es como si hubieran visto varias películas distintas y pueden constatar además que eso de la comunicación entre humanos no tiene compostura.

Prosigamos. Estábamos en que se acercan seis amigos a la taquilla, y la taquillera les hace entrega de una serie de entradas numeradas; no importa si los colocó juntos o no, pero cada uno recibió un número de butaca distinto. Hasta aquí todo encaja bien, nunca mejor dicho.

Más tarde, faltando poco para comenzar la sesión, se presenta en la taquilla otro grupo, de cinco personas esta vez. Y aquí es cuando la taquillera procede de modo harto extravagante, sin que el grupo lo advierta de momento. De un mazo de cartas numeradas del 1 al 20 y previamente bien barajado, nuestra inestable amiga saca cinco al azar y hace entrega de entradas con los mismos números que indican las cartas.

Al llegar a este punto se cierra la taquilla, que va a empezar la película y no se admite ni rezagados ni palomitas. Se pregunta cuál es la probabilidad de que se produzca alguna colisión, es decir de que haya riesgo de que al menos alguien del segundo grupo se encuentre disputando la misma butaca a otro espectador del grupo anterior. Se desea conocer también las probabilidades de que se produzcan una, dos, tres, cuatro o cinco colisiones únicas (es decir, cuando se dice dos, por ejemplo, se trata de dos y sólo dos). También se piden las expresiones para el caso general en que el aforo es a, el primer grupo está formado por p personas y el segundo por q personas, y donde el procedimiento empleado por la taquillera es el mismo, por el cual asigna p asientos distintos a los integrantes del primer grupo y q distintos a los del segundo grupo, pero elegidos al azar de entre todas las butacas del aforo del local, de modo que se produce la posibilidad de colisiones. La solución se presenta al final del artículo, para alejarla de la vista del lector por fuera el caso que se animara a resolverlo por su cuenta.

Deseamos comentar también otro aspecto. Hemos desarrollado un programa en PC para comprobar nuestra solución; el programa simula un número elevado de ensayos para obtener un resultado estadístico, resultado que se traduce en términos de probabilidad. A la vez que se confirma lo correcto de nuestra solución (en general el planteo por simulación es sencillo, pues se limita a plasmar el planteo del problema) se pone a prueba la bondad de la rutina generadora de números aleatorios del compilador utilizado (Borland Pascal en nuestro caso), y este es el aspecto que queremos destacar. Los números que pretenden ser aleatorios producidos mediante ordenador (en general, por un algoritmo) no se consideran propiamente tales, por más que en la práctica se comporten muy bien, y es por eso que reciben en puridad el nombre de números seudo aleatorios. Un algoritmo, por muy hábilmente que esté diseñado, dará como resultado números producto de una pauta, y no serán por lo tanto genuinamente aleatorios. Dicho de forma más clara: si se repite el algoritmo generador, alimentado con los mismos datos iniciales, se repetirá exactamente la secuencia de dígitos producida. Donald Knuth, el creador del *TeX*, en su «*The Art of Computer Programming, vol 2, Seminumerical Algorithms*», que trata extensamente el tema de los números seudo aleatorios, encabeza el capítulo con el que lo inicia, el tercero, titulado *Random Numbers*, con una cita de John von Neumann (1951), que viene a decir así:

«Todo aquel que considere métodos aritméticos para producir dígitos aleatorios se halla, desde luego, en estado de pecado.»

A pesar de mi veneración por la figura de von Neumann debo decir que desde hace mucho tiempo vivo perpetuamente al borde de la condenación eterna. Si desoigo su advertencia es porque cada vez que recurro a una rutina generadora de números aleatorios en un lenguaje de programación, siempre termino frotándome con incredulidad los ojos, porque casi no doy crédito a la perfección de los resultados. No solamente no distinguiría dichos resultados de los que cabría obtener de una fuente de números aleatorios supuestamente genuina (el comportamiento azaroso es cosa dura de identificar) sino que siempre desconfiaría más de cualquier artefacto físico productor de ruido (una ruleta, por ejemplo) que de mis preciadas rutinas, por mucho que me conste que éstas se apoyan en un ordenador que repite instrucciones con precisión y obsesión maníacas.

Véase, como ilustración de lo dicho, el ejemplo siguiente. En la Tabla 1, columna 2, figuran los valores de las probabilidades correspondientes al problema antes propuesto, calculadas mediante las fórmulas teóricas obtenidas como solución del mismo, y que se presentan al final del artículo. En la columna 3 se han dispuesto los valores obtenidos mediante el método de Monte Carlo, para un número de ensayos de mil millones. El ajuste, como puede observarse, es del orden de la cienmilésima (en el último caso no llega a la millonésima). Y eso resulta así a pesar de que para el número de ensayos se ha elegido provocativamente un valor elevado: para un número tan grande cabría esperar que la rutina generadora de números seudo aleatorios quedara atrapada en algún momento en algún bucle que terminara por distorsionar los resultados. Está claro que no ocurre así, lo que se explica porque las rutinas generadoras son sometidas a rigurosas comprobaciones estadístricas.

Colisiones	**Probabilidad calculada**	**Frecuencia ensayo**	**Diferencia**
0	0,1291279670	0,12914976	2 E-05
1	0,3873839009	0,38733996	-4 E-05
2	0,3521671827	0,35217752	1 E-05
3	0,1173890609	0,11741422	2,5 E-05
4	0,0135448916	0,01353067	-1,4E-05
5	0,0003869969	0,00038788	8,8 E-07

Tabla 1. Caso a = 20, p = 6, q = 5 (mil millones de ensayos)

Recordemos también que las rutinas generadoras de números seudo aleatorios que funcionan en ordenadores disponen de un recurso fácil para evitar repetir cada vez la misma secuencia de dígitos, y que consiste en consultar el reloj interno del propio ordenador. Esta posibilidad se suele dejar al criterio del programador, mediante una instrucción al efecto. Otra variante, aunque esta es intrínseca a la rutina, consiste en una instrucción mediante la cual se pasa un parámetro, llamado *semilla* (seed), que provoca un inicio distinto de la secuencia. No siempre es deseable esta característica, porque en etapas de desarrollo conviene a veces repetir la misma secuencia aleatoria dado que se está prestando atención a otras características del programa que se desea comprobar cómo se comportan bajo las mismas circunstancias.

También es este un buen momento para hablar de otra razón por la que resulta conveniente valerse de un programa que instrumentalice el método de Monte Carlo para la estimación de los resultados de un problema. Si en lugar del mini cine propuesto como ejemplo nos enfrentamos a un megacine de un macro centro comercial en China, cuyo aforo es de 8 000 butacas, y al que se presentan dos grupos de p = 1 862 y q = 1 570 personas, por ejemplo, se comprende que los resultados, a pesar de disponer de las fórmulas, no son fáciles de obtener con calculadoras ordinarias o incluso lenguajes de programación que tengan limitada la precisión numérica (ya sea en enteros como en coma flotante), debido a la inevitable acumulación de errores. Mediante un programa simulador, sin embargo, el problema de precisión no se presenta, pues todo se reduce a sumas y a dividir finalmente por el total de ensayos. Por este procedimiento se han estimado los resultados correspondientes al megacine citado. La figura 1 muestra la distribución, que se aproxima como se aprecia a una de tipo normal; en la parte de la izquierda se representa situada sobre el rango de las 1570 colisiones posibles, y a la derecha se puede ver más claramente al presentarla destacada en el rango en que el número de colisiones no es nulo. La media se sitúa en 365,449, y la desviación estándar es 15,014, de modo que cabría esperar que el 95 por ciento de las colisiones se halle entre los valores 305,476 y 335,421 (la media más menos dos veces la desviación estándar).

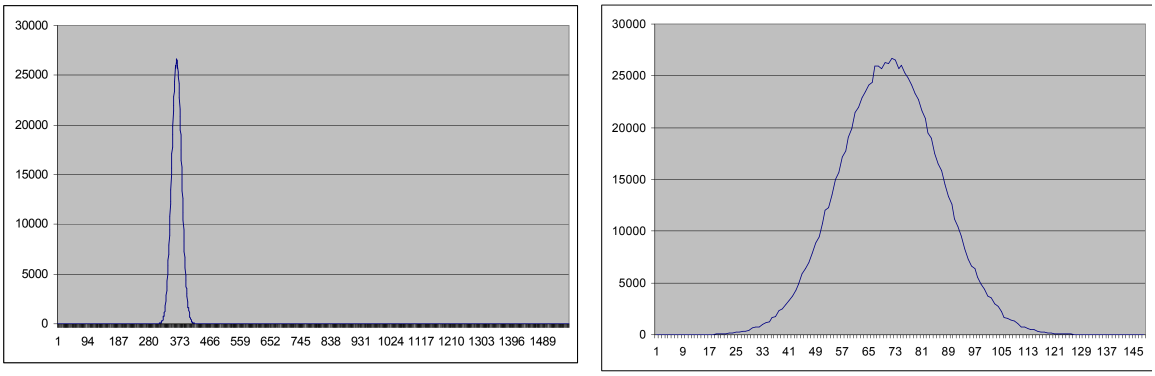


Fig. 1.- Distribución para un millón de ensayos, con a = 8 000, p = 1 862 y q = 1 570

Para obtener los valores exactos mediante las fórmulas correspondientes a las soluciones, hay que recurrir a lenguajes de programación que manejen números con precisión muy alta o bien ilimitada, tipo *Java* con su biblioteca de funciones matemáticas (la clase BigDecimal) o bien *Ruby*. Otra solución, seguramente la más adecuada, es la de emplear aplicaciones orientadas al cálculo matemático, como son por ejemplo *Mapple* o *Mathematica*, que disponen también de capacidad de programación: permiten en efecto asignaciones y comparaciones y poseen estructuras de control, aparte de disponer de operadores matemáticos de muy alto nivel.

Solución

Para el caso en que se produzca al menos una colisión la solución es sencilla. Como sucede con muchos problemas de probabilidades, se resuelve mejor calculando la probabilidad complementaria, es decir la de que no se produzca ninguna colisión, que será

Pc = (14/20) x (13/19) x (12/18) x (11/17) x (10/16) = 14! x 15! / (9! x 20!) ≈ 0,1291279

de modo que la probabilidad que se busca es P = 1 – Pc ≈ 0,870872033, o sea aproximadamente del 87 por ciento. En el caso general, de un aforo de *a* butacas, y dos grupos de *p* y *q* personas, a las que se les asigna lugares al azar, pero sin repetición dentro de cada grupo, la probabilidad de que se presente al menos una colisión es

P = 1- (a-p)! (a-q)! / [(a-p-q)! x a!] (1)

Se observará la simetría en relación con los términos *p* y *q*.

Las probabilidades de que se tenga una (y sólo una), dos (y sólo dos), etc. colisiones, hasta cinco, son

$$P1=\binom{5}{1}\frac{6}{20}\frac{14}{19}\frac{13}{18}\frac{12}{17}\frac{11}{16}=0{,}3873839009\,;\ P2=\binom{5}{2}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{14}{18}\frac{13}{17}\frac{12}{16}=0{,}3521671827;$$

$$P3=\binom{5}{3}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{14}{17}\frac{13}{16}=0{,}1173890609\,;\ P4=\binom{5}{4}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17}\frac{14}{16}=0{,}0135448916$$

$$P5=\binom{5}{5}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17}\frac{2}{16}=0{,}000386969$$

La solución general, para *c* colisiones, con *c* ≤ *m*, siendo m el menor de los números *p* y *q*, y siendo por supuesto *p* y *q* menores que *a*, se expresará

$$P(c)=\binom{q}{c}\frac{p}{a}\times\frac{p-1}{a-1}\times\frac{p-2}{a-2}\times\frac{p-3}{a-3}\times\ldots\times\frac{p-c+1}{a-c+1}\times\frac{a-p}{a-c}\times\frac{a-p-1}{a-c-1}\times\ldots\times\frac{a-p-q+c+1}{a-q+1}=$$

$$=\frac{q!}{(q-c)!c!}\times\frac{p!}{(p-c)!}\times\frac{(a-q)!}{a!}\times\frac{(a-p)!}{(a-p-q+c)!}\qquad(2)$$

En todas las expresiones anteriores es $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$. La simetría con respecto a *p* y *q* que valía para la fórmula (1) se sigue manteniendo aquí.

P. Crespo, agosto 2006

El sueldo insuficiente

La dibujante argentina Maitena nos brinda en el suplemento de *El País* (12.12.04) este precioso chiste, que nos sugiere inmediatamente una pregunta matemática:

¿Cuánto debería ganar la protagonista, en relación con su sueldo anterior, para llegar a fin de mes sin endeudarse?

Solución

Sea x su sueldo, y x_o sus necesidades. Existirá un déficit, $x - x_o$, obviamente negativo.
Este déficit es el doble del que se produciría con la mitad del sueldo, que sería $x/2 - x_o$.

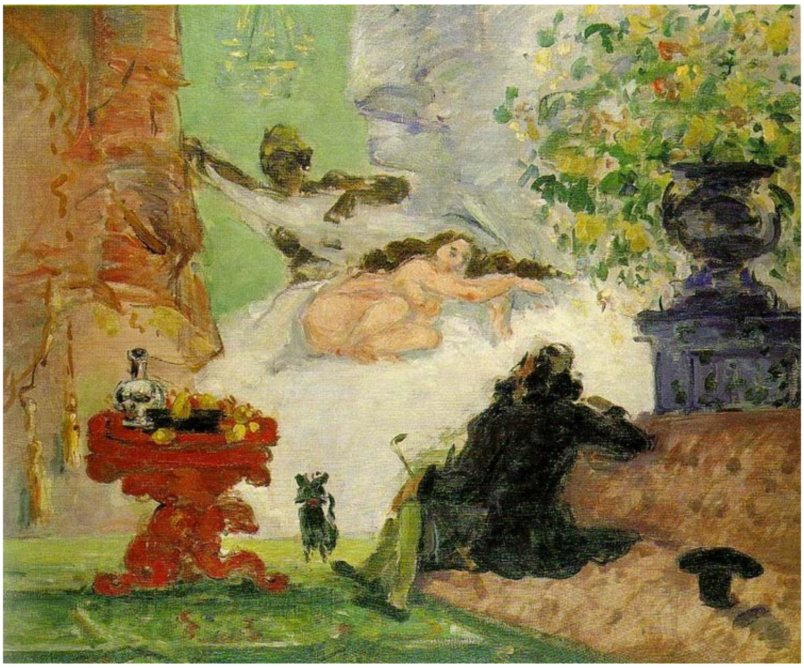
El problema se reduce pues a resolver la ecuación:

$$\mathbf{x - x_o = 2\ (x/2 - x_o)}$$

de la que resulta $x/x_o = 2/3$.

Es decir, que el sueldo x cubre sólo los 2/3 de los gastos de la protagonista.
Dicho de otra forma: **la protagonista necesita ganar un 50 % más para equilibrarse**.

Josep M. Albaigès, BCN, dic 04



P. Cézanne, **Una Olympia moderna,** *c.1873, óleo sobre lienzo, 46 x 55 cm, París, Musée d´Orsay.*